ECUACIONES DE 1° GRADO - FUNCIÓN POLINOMIAL DE 1° GRADO

DESARROLLO DEL TEMA

I. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO Ó ECUACIÓN LINEAL

Forma: $ax + b = 0;\ a \neq 0$. Donde: "x" es la incógnita de la ecuación, además:

$$C.S. = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

Análisis de la ecuación paramétrica ax + b = 0

Se presentan los siguientes casos:

- Si: $a \neq 0 \Leftrightarrow$ la ecuación es compatible determinado también llamada ecuación consistente determinado (tiene un número finito de soluciones, para la ecuación analizada tiene solución única)
- Si: $a = 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow$ la ecuación es compatible indeterminado también llamada ecuación consistente indeterminado (tiene infinitas soluciones)
- Si: $a = 0 \wedge b \neq 0 \Leftrightarrow$ la ecuación es incompatible ó inconsistente también llamada ecuación absurda (no no tiene solución)

II. PLANTEO DE ECUACIONES

Para resolver el problema relativo a números o cantidades desconocidos se debe expresar una información escrita en idioma normal, en el simplificado idioma de las proposiciones matemáticas, las cuales nos permiten operar con mas comodidad y rapidez que otros procedimientos. Esto implica realizar una especie de traducción de situaciones de la vida real, al simbolismo matemático, tarea que constituye el argumento más útil en todo el proceso de solución.

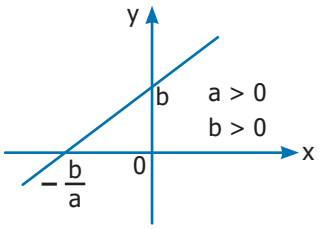
Procedimiento para resolver problemas

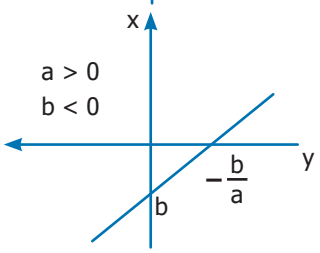
Seguir las siguientes pautas:

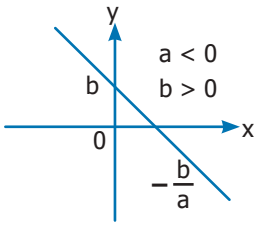
1. Representación de las cantidades desconocidas o incógnitas por variables (x; y; z; etc)
2. Planteo de las ecuaciones que relacionan a las incógnitas con los datos del problema.
3. Solución de las ecuaciones planteadas, esto es determinar los valores de las variables.
4. Prueba o verificación de los valores obtenidos para ver si cumplen las condiciones del problema.

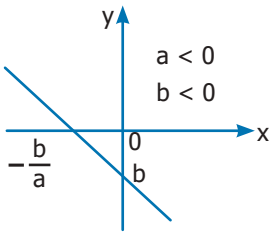
III. FUNCIÓN DE 1° GRADO

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/F(x) = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}\ a \neq 0$









PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Sea la ecuación de incognita x; $(m + 3)(m - 2)x + (m - 1)(m + 3) = 0$.
Tiene infinitas soluciones, calcular "m".

A) –3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

UNMSM 2001 - I
NIVEL FACIL

Resolución:

$$x = \frac{-(m-1)(m+3)}{(m+3)(m-x)}$$

Para que tenga infinitas soluciones.

$$m = -3$$

Respuesta: –3

Problema 2

En una fiesta se observa que en un determinado instante el número de parejas que bailan es la mitad del número de hombres que no bailan y el número de mujeres que no bailan es el cuádruple del número de hombres que bailan. Si en total hay 120 personas, ¿cuántos hombres hay en dicha fiesta?

A) 30 B) 15 C) 45
D) 60 E) 75

UNMSM 2014 - I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Del enunciado:

	Hombres	Mujeres
Bailan	x	x
No Bailan	2x	4x

Total de personas =

$$x + x + 2x + 4x = 120$$
$$x = 15$$

Nos piden:

El numero de hombres = $3x = 3(15)$
$= 45$

Respuesta: 45

Problema 3

Sea la ecuación de incógnita x:

$$(2m - 10)x + (m^2 - 5) = 0$$

Es compatible determinado, indique el valor que no puede tomar "x".

A) 3
B) 5
C) 7
D) 9
E) 11

UNMSM 2008 – I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

$$x = \frac{m^2 - 5}{2m - 10}$$

Luego:

$$2m - 10 \neq 0$$
$$m \neq 5$$

Respuesta: 5

PRODUCTOS NOTABLES

DESARROLLO DEL TEMA

Son aquellos productos que al adoptar cierta forma particular, evita que se efectúe la operación de multiplicación escribiendo directamente el resultado.

I. PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

A. Binomio al cuadrado

El desarrollo de un binomio al cuadrado nos da un trinomio cuadrado perfecto, esto es "el cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Binomio suma al cuadrado}} = \underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\text{Binomio diferencia al cuadrado}} = \underbrace{a^2-2ab+b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Ejemplos:

- $(x+1)^2 = x^2+2(x)(1)+(1)^2$
  $= x^2+2x+1$
- $(x-4)^2 = x^2-2(x)(4)+(4)^2$
  $= x^2-8x+16$
- $(3x-54)^2 = (3x)^2-2(3x)(5y)+(5y)^2$
  $= 9x^2-30xy+25y^2$
- $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2-2(\sqrt{a})(\sqrt{b})+(\sqrt{b})^2$
  $= a-2\sqrt{ab}+b$

B. Identidades de Legendre

Son dos identidades que relacionan los binomios suma y diferencia.

$$(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$

Ejemplos

- $\underbrace{(x+6)^2+(x-6)^2}_{2(x^2+6^2)} = 2(x^2+36)$
- $\underbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}_{4(\sqrt{a})(\sqrt{b})} = 4\sqrt{ab}$
- $\underbrace{(10x+4y)^2-(10x-4y)^2}_{4(10x)(4y)} = 160xy$

Nota:

$$(a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$$

C. Diferencia de cuadrados

El producto de dos binomios; uno que presenta la suma de dos expresiones y el otro la diferencia de las mismas expresiones nos da el cuadrado de la primera, menos el cuadrado de la segunda.

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

$$(a^m+b^n)(a^m-b^n) = a^{2m}-b^{2n}$$

Ejemplos:

- $(x+4)(x-4) = x^2-4^2$
- $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2 = a-b$
- $(2x^4+3y^6)(2x^4-3y^6) = (2x^4)^2-(3y^6)^2$
  $= 4x^8-9y^{12}$
- $x-y = \sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2 = (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

D. Binomio al cubo

Al desarrollar un binomio al cubo se obtiene el cubo del primer término, más el producto del triple del primero al cuadrado por el segundo, más el producto del triple del primero por el segundo al cuadrado, más el cubo del segundo término.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Análogamente con el binomio diferencia al cubo:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos:

- $(x + 1)^3 = x^3 + 3(x)^2(1) + 3(x)(1)^2 + (1)^3$
  $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- $(3x - 1)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(1) + 3(3x)(1)^2 - (1)^3$
  $= 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

Nota:

Acomodando los desarrollos de los binomios al cubo, se obtienen:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Identidades que son de mucha utilidad en ciertos problemas operativos.

Ejemplos:

- $(x + 4)^3 = x^3 + (4)^3 + 3(x)(4)(x + 4)$
  $= x^3 + 64 + 12x(x + 4)$
- $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3+3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$
  $= x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
- $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3-3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$
  $= x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

E. Multiplicación de binomios con un término común

Al multiplicar dos binomios con un término en común se obtiene: el común al cuadrado, más el producto de la suma de no comunes por el común, más el producto de no comunes.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \underbrace{(a + b)}_{\text{suma}}x + \underbrace{ab}_{\text{producto}}$$

Ejemplos:

- $(x + 3)(x + 5) = x^2 + (8)x + 15$
- $(x + 15)(x - 10) = x^2 + (5)x - 150$

Nota:

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x+abc$$

F. Suma y diferencia de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Suma de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Diferencia de cubos

En general:

$$a^{3m} + b^{3n} = (a^m + b^n)(a^{2m} - ab + b^{2n})$$

$$a^{3m} - b^{3n} = (a^m - b^n)(a^{2m} + a^m.b^n + b^{2n})$$

Ejemplos:

- $x^3 + 125 = x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$
- $8 + a^3 = 2^3 + a^3 = (2 + a)(4 - 2a + a^2)$
- $x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
- $x^{12} - y^6 = (x^4)^3 - (y^2)^3 = (x^4 - y^2)(x^8 + x^4y^2 + y^4)$

G. Desarrollo de un trinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

Ejemplos:

- $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - bc - ac)$
- $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab + bc - ac)$
- $(x + y + 3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2(xy + 3y + 3x)$

H. Desarrollo de un trinomio al cubo

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ac)-3abc$$

Ejemplos

- $(x + y + 2)^3 = x^3 + y^3 + 8 + 3(x+y)(y+z)(x+2)$

I. Identidades adicionales

Identidad de Argand

$$(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = a^4 + a^2 + 1$$
$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$$
$$(x^{2m}+x^my^n+y^{2n})(x^{2m} - x^my^n + y^{2n}) = x^{4m} + x^{2m}y^{2n} + y^{4n}$$

Identidades condicionales

Si: $a + b + c = 0$, se cumple:

- $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$
- $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $(ab + bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$
- $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$
- $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + bc + ac)$

Identidad de Gauss

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ac))$$

Identidad especial

$$(x + y)(y + z)(x + z) + xyz = (x + y + z)(xy + yz + xz)$$

Teoremas

Sean $\{x,y,z\} \subset \mathbb{R}$; $\{m,n,p\} \subset \mathbb{Z}^+$, luego:

$$x^{2m} + y^{2n} + z^{2p} = 0 \leftrightarrow x = y = z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz \leftrightarrow x = y = z$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Sabiendo que $x + \frac{1}{x} = 3$, determine el valor de $E = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$

A) 49 B) 36
C) 25 D) 18
E) 23

UNMSM 2002

Resolución:

Al primer dato lo elevamos al cuadrado:

$$x + \frac{1}{x} = 3$$
$$\rightarrow \underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}_{} = x^2+\frac{1}{x^2}+2\cancel{(x)}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)$$
$$(3)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$
$$7 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Luego, al primer dato lo elevamos al cubo

$$\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3}_{3} = x^3+\frac{1}{x^3}+3\cancel{(x)}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Despejando:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 3^3 - (3)(3) = 18$$

Entonces:

$$E = x^3 + \frac{1}{x^3} + x^2 + \frac{1}{x^2} = 18 + 7 = 25$$

Respuesta: 25

Problema 2

Si: $2^{4x} + 2^{-4x} = 119$ y $x > 0$

Halle: $2^x - 2^{-x} + 5$

A) 8 B) 2 C) 11
D) 4 E) 9

UNMSM 2004-I

Resolución:

Tenemos: $2^{4x} + 2^{-4x} = 119$

$$2^{4x} + 2(2^{2x})(2^{-2x}) + 2^{-4x} = 119 + 2$$
$$(2^{2x} + 2^{-2x})^2 = 121$$
$$2^{2x} + 2^{-2x} = 11$$
$$2^{2x} - 2(2^x)(2^{-x}) + 2^{-2x} = 11 - 2$$
$$(2^x - 2^{-x})^2 = 9$$
$$2^x - 2^{-x} = 3$$

$\therefore \quad 2^x - 2^{-x} + 5 = 3 + 5 = 8$

Respuesta: 8

Problema 3

Si: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$,

Entonces: $x^6 + \frac{1}{x^6}$ es:

A) 18 B) 9
C) 27 D) 25
E) 16

UNMSM 2004-I

Resolución:

Tenemos: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3 = (3)^3$$
$$x^6+\frac{1}{x^6}+3\left(x^2\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 27$$
$$x^6 + \frac{1}{x^2} + 3(1)(3) = 27$$
$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 18$$

Respuesta: 18

ECUACIONES DE 2° GRADO

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN

Llamadas también ecuaciones cuadráticas, tienen la forma:

Tiene 2 raíces

$$ax^2 + bx + c = 0;\ \forall a \neq 0;\ (a; b; c) \subset \mathbb{R}$$

Coeficiente cuadrático | Coeficiente lineal | Término independiente

Si dado: a, b y c ≠ o entonces: $ax^2 + bx + c = 0$ se llama ecuación de segundo grado completa.

Si b = 0, entonces: $ax^2 + c = 0$
Si c = 0, entonces: $ax^2 + bx = 0$
Si b = c = 0, entonces: $ax^2 = 0$

II. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

A. Factorización

Consiste en factorizar el polinomio de segundo grado:
P1: Se trasladan todos los términos al primer miembro.
P2: Se factoriza este miembro por agrupación o aspa simple.
P3: Para obtener las raíces de la ecuación, se iguala cada factor a cero.

B. Fórmula

De la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$,
se deduce:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2}$$ *Fórmula de Carnot* (1)

Donde:

La discriminante $D = \Delta = b^2 - 4ac$ (2)

Ejemplo:

Halle la discriminante de

$$2x^2 + 3x - 4 = 0$$

Por definición:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)$$
$$\therefore \Delta = 41$$

- **Discusión de las raíces de una ecuación cuadrática**

Primer caso: (Δ > 0)

- Las raíces son reales y diferentes.
- Si "Δ" es un cuadrado perfecto, las raíces x_1 y x_2 son racionales.
- Si "Δ" no es un cuadrado perfecto, las raíces x_1 y x_2 son irracionales conjugadas.

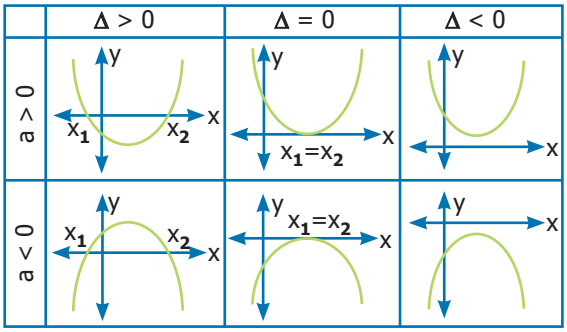
Segundo caso: (Δ = 0)

- Las raíces son reales e iguales.
- Se cumple: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Tercer caso: (Δ < 0)

- Las raíces son complejas y conjugadas.
- Las raíces: $x_1 = a + bi$; $x_2 = a - bi$.

Interpretación gráfica:



III. PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Sea la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$$

y sus raíces x_1 y x_2, se tienen las siguientes propiedades:

A. Suma de raíces

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

B. Producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

C. Diferencia de raíces

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

D. Suma de cuadrados de las raíces

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

Reconstrucción de una ecuación cuadrática

Conocidas las raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado, esta se reconstruye empleando la suma y el producto de dichas raíces.

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Donde: $S = x_1 + x_2$

$P = x_1 \cdot x_2$

Teorema de las ecuaciones cuadráticas equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas raíces.

Si: $ax^2 + bx + c = 0$

$mx^2 + nx + p = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

Teorema de la raíz común

Si las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0$; $\forall a \neq 0$

$mx^2 + nx + p = 0$; $\forall m \neq 0$

admiten una raíz común, se cumplirá:

$$(a \cdot n - m \cdot b)(b \cdot p - n \cdot c) = (a \cdot p - m \cdot c)^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación:

$$x^2 - 2(m-1)x + 3 = 0$$

La suma de los valores que puede tomar "m"; para que se satisfaga la relación:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 1$$

UNMSM 2004-II

NIVEL INTERMEDIO

A) $-1/2$ B) $1/2$
C) $5/2$ D) 2
E) $3/2$

Resolución:

De la relación:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2$$
$$(x_1 + x_2)^2 = 3x_1 \cdot x_2$$

Pero:

$$x_1 + x_2 = 2(m-1); \; x_1 \cdot x_2 = 3$$

Luego:

$$4(m-1)^2 = 3 \cdot 3$$
$$4m^2 - 8m - 5 = 0$$
$$m_1 + m_2 = -(-8)/4 = 2$$

Respuesta: 2

Problema 2

La suma de las raíces de la ecuación

$\sqrt{x-1} = \sqrt{3\sqrt{x-1}}$ es:

UNMSM 2005-I

NIVEL FÁCIL

A) 7 B) 10
C) 9 D) 8
E) 11

Resolución:

Luego de elevar al cuadrado:

$$(x-1)^2 = (3\sqrt{x-1})^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 9(x-1)$$
$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

Entonces:

$$x_1 + x_2 = -(-11)/1 = 11$$

Respuesta: 11

Problema 3

Del producto de dos números enteros positivos consecutivos se resta la suma de estos mismos y se obtiene 71. El número mayor es:

UNMSM 2005-I

NIVEL FÁCIL

A) 10 B) 7
C) 9 D) 8
E) 6

Resolución:

Sean n y n + 1 los números

$$n(n+1) - (2n+1) = 71$$
$$n^2 - n - 72 = 0$$
$$(n-9)(n+8) = 0$$
$$n = 9 \; ; \; n+1 = 10$$

Respuesta: 10

SISTEMAS SIMULTÁNEOS LINEALES Y DE GRADO SUPERIOR

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN

Conjunto de ecuaciones con dos o más incógnitas que verifiquen simultáneamente para ciertos valores asignados a sus incógnitas.

A. Solución de un Sistema

Si existe, depende de la cantidad de incógnitas.
Si el sistema tiene 2 incógnitas, una solución del sistema será el par ordenado: $(x_0; y_0)$.
Si el sistema tiene 3 incógnitas, una solución del sistema será la terna ordenada: $(x_0; y_0; z_0)$.

B. Conjunto Solución

Conjunto formado por todas las soluciones del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$ Cuya solución: $x = 5; y = 2$
Entonces: C.S. = {(5;2)}

II. CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

A. De acuerdo con su solución

		Ejemplo	Observación	En general $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$
Compatible	**Determinada** Tiene una cantidad exacta de soluciones.	$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ C.S. = {(−1;3)}	$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
	Indeterminada Tiene infinitas soluciones.	(-2) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ (+) $-2x - 4y = -8$ $2x + 4y = 8$ $0x + 0y = 0$ C.S. = i	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Incompatible Con el no tiene solución.		(-2) $x + 2y = 4$ (+) $2x + 4y = 9$ $-2x - 4y = -8$ $2x + 4y = 9$ $0x + 0y = 1$ C.S. = Ø	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{4}{9}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{4}{9}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

B. De acuerdo con el tipo de ecuaciones

1. Sistema lineal

Cuando cada una de las ecuaciones son lineales (de primer grado).

Ejemplos:

A. $\begin{cases} 5x + y + 2z = 4 \\ x - 2y + z = -7 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - 2y + 5z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

2. Sistema no lineal

Cuando al menos, una de las ecuaciones es no lineal.

Ejemplos:

A. $\begin{cases} x^2 + xy + y = 21 \\ x - y = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+9} = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

C. Métodos para resolver un sistema lineal

1. Método de Carl Gauss (Reducción)

Este método consiste en ir disminuyendo ecuaciones e incógnitas hasta llegar a la menor cantidad de ecuaciones e incógnitas.

Ejemplo:

$\begin{cases} x + 3y = 11 \quad ...(1) \\ 2x - y = 8 \quad ...(2) \end{cases}$

Resolución:

(1) : $x + 3y = 11$

(2) $\times 3$: $6x - 3y = 24$

Sumando : $7x = 35 \Rightarrow x = 5$

En (1) $y = (11 - 5)/3 \Rightarrow y = 2$

$\therefore$ C. S. = {(5; 2)}

2. Método De Gabriel Cramer

Para aplicar este método que utiliza determinantes, el número de ecuaciones y el número de incógnitas debe ser el mismo.

Sea el sistema:

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Entonces: $x = \frac{D_x}{D_s}$; $y = \frac{D_x}{D_s}$; $Ds \neq 0$

Siendo:

$$D_S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

D. Determinante

El determinante viene a ser una función que, aplicada a una matriz cuadrada, da un único valor numérico. Sea A una matriz cuadrada, su determinante se representa por |A| o det. (A).

Sean:

determinante de una matriz cuadrada de segundo orden

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (aei+dhc+gbf)-(gec+ahf+dbi)$$

determinante de una matriz cuadrada de tercer orden

E. Sistema lineal homogéneo

Son aquellos sistemas lineales en que cada ecuación tiene término independiente nulo.

Ejemplo:

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$

- Solución trivial: soluciones de la forma: {(0; 0)}; {(0; 0; 0)}; ...
- Un sistema homogéneo siempre tiene solución trivial (impropia).
- Se busca si tiene otras soluciones no triviales (propias).

F. Resolución de los sistemas no lineales

Para resolver este tipo de sistemas, no existe un método general. Se resuelve de acuerdo la forma que se presenta y se aplican productos notables, factorización y diversos artificios.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Un estante puede llenarse con 24 libros de Álgebra y 20 libros de Historia o con 36 de Álgebra y 15 de Historia. ¿Con cuántos libros solo de Álgebra se pueden llenar el estante?

UNMSM 2004
NIVEL INTERMEDIO

A) 60 B) 84 C) 92
D) 90 E) 72

Resolución:

$T = 24X + 20H$ ..... (1)
$T = 36X + 15H$ ..... (2)

(1) = (2)
$24X + 20H = 36X + 15H$
$5H = 12X$

En (1): $T = 24X + 4(12X)$
$T = 72X$

Respuesta: 72

Problema 2

Juan reparte S/. 24 000 en partes iguales a un grupo de personas. Si hubiera incluido dos personas más, la cantidad de soles que hubiera recibido cada uno de ellos hubiera disminuido en S/. 20. ¿Entre cuántas personas repartió Juan los S/. 24 000?

UNMSM 2008-II
NIVEL INTERMEDIO

A) 24 B) 50 C) 48
D) 32 E) 36

Resolución:

Total = Nº.º1 pers. × cant/unitaria
$24\,000 = n \cdot c$ .....(1)
$24\,000 = (n + 2) \cdot (c - 20)$ .....(2)

De (2): $c = 10(n + 2)$
En (1): $2\,400 = n \cdot (n + 2)$
$n = 48$

Respuesta: 48

Problema 3

Determine la suma de todos los valores reales de a, de modo que el sistema

$$\begin{cases} 6x - ay = y \\ 2x + 3y = ax \end{cases}$$

tenga infinitas soluciones.

UNMSM 2008-I
NIVEL INTERMEDIO

A) 1 B) –1 C) 0
D) 2 E) –2

Resolución:

En el sistema se tiene:
$6x = (a + 1)y$
$(2 - a)x = -3y$
Para que tenga infinitas soluciones se cumple que:

$$\frac{6}{2-a} = \frac{a+1}{-3};\ a = 5 \vee a = -4$$

Por lo tanto la suma de valores es 1.

Respuesta: 1

TEORÍA DE EXPONENTES

DESARROLLO DEL TEMA

En esta sección, examinaremos las propiedades de las expresiones que contienen exponentes, para dicho estudio definamos la operación de potenciación.

I. POTENCIACIÓN

Es aquella operación matemática, que consiste en encontrar un número llamado potencia, a partir de otros dos números llamados base y exponente.

exponente

$a^n = P$, $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}$

base — potencia

Nota:
Para calcular la potencia, debemos tener presente con qué clase de exponente estamos trabajando.

A. Exponente Natural

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{\text{"n factores de x"}}; n \in \mathbb{N}$$

Ejemplos:

1. $2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$
2. $0^3 = 0.0.0 = 0$
3. $-4^4 = -(4)^4 = -(4.4.4.4) = -256$
4. $(-4)^4 = (-4)(-4)(-4) = 256$
5. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$
6. $\frac{3^2}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$
7. $10^2 = 10.10 = 100$
8. $(-10)^3 = (-10)(-10)(-10) = -1000$

Nota:
Cuando vayas a aplicar un exponente a una base negativa o fraccionaria, coloca ésta entre paréntesis. También, es conveniente hacer notar la diferencia entre:

$ax^n = a \underbrace{. x . x . x \ldots x}_{\text{"n factores de x"}}$ y $(ax)^n = \underbrace{(ax)(ax)(ax)\ldots(ax)}_{\text{"n factores de x"}}$

Notar que...
Si tomamos sólo en cuenta los signos, se cumple que:

$(+)^n = +$; para todo n $\qquad (-)^n = \begin{cases} -; \text{ n impar} \\ +; \text{ n par} \end{cases}$

B. Exponente Cero

$$a^0 = 1; a \neq 0$$

Ejemplos:

1. $93^0 = 1$
2. $0{,}00002^0 = 1$
3. $-5^0 = -1$
4. $\left(-\frac{20}{3}\right) = 1$

Ojo: 0^0 No está definido

5. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)^0 = 0^0$ No definido

C. Exponente Negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n; a \neq 0$$

Ejemplos:

1. $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$
2. $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

Nota:
Nota que una expresión puede pasar del numerador al denominador o viceversa siempre y cuando se le cambia de signo a su exponente. Ejemplos:

a) $\frac{x^{-3}}{y^{-5}} = \frac{y^5}{x^3}$ b) $\frac{3^2}{5^{-3}} = 3^2.5^3 = 9.125 = 1125$

3. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$
$= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
$= \frac{4}{9}$

4. $\frac{5^{-2}}{4^{-3}} = \frac{\frac{1}{5^2}}{\frac{1}{4^3}}$
$= \frac{4^3}{5^2}$

II. TEOREMAS DE POTENCIACIÓN

Si no hay divisiones entre cero, se cumple:

A. Multiplicación o división de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

1. $3^2.3^3 = 3^5$
$= 243$

2. $2^{-2}.2^6.2^{-3} = 2^{-2+6+(-3)}$
$= 2^1 = 2$

3. $(3x^2y^4)(4x^4.y^{-2}) = 3.4.x^2.x^4.y^4.y^{-2}$
$= 12x^6y^2$

4. $\frac{2^{81}}{2^{79}} = 2^{81-79}$
$= 2^2$
$= 4$

Nota:
La regla de la multiplicación o división solo se aplica a expresiones que tienen la misma base. Por ejemplo la expresión x^5y^3 no se puede simplificar, porque las bases de las expresiones exponenciales son diferentes.

B. Potencia de una potencia

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$$

Ejemplos:

1. $(3^2)^3 = 3^{2.3}$
$= 3^6$
$= 729$

2) $(x^2.x^3)^6 = (x^5)^6$
$= x^{30}$

C. Potencia de una multiplicación o división

$$(a \cdot b)^n = a^n.b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

1. $(-2.3)^3 = (-2)^3.3^3$
$= -8.27$
$= -216$

2. $(3^2.2^{-3}.7)^2 = (3^2)2.(2^{-3})^2(7^2)$
$= 3^4.2^{-6}.7^2$
$= \frac{3^4.7^2}{2^6}$

3. $\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{(-3)^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

Nota:
En general se cumple que:

$a^{m^n} \neq (a^m)^n$

Ejemplo:

$2^{3^2} \neq (2^3)^2$
$\downarrow \quad\quad \downarrow$
$2^9 \quad\quad 2^6$

Recuerda:

a) $a^m.a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a.b)^n = a^n.b^n$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ e) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{n.m}$

Estas propiedades se cumplen para toda clase de exponente (natural, cero, negativo y fraccionario).

III. RADICACIÓN EN IR

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Donde:

n = índice ($n \in \mathbb{R}$)

a = radicando ($a \in \mathbb{R}$)

b = raíz ($b \in \mathbb{R}$)

Además se debe cumplir que:

$$\sqrt[\text{Par}]{+} = + \qquad \sqrt[\text{Par}]{-} = \text{No existe}$$
$$\sqrt[\text{Impar}]{+} = + \qquad \sqrt[\text{Impar}]{-} = -$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$
2. $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ porque $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$
3. $\sqrt[3]{-0,027} = -0,3$ porque $(-0,3)^3 = -0,027$

Exponente fraccionario

Sea $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt[n]{a^m}$ existe, entonces:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m$$

Ejemplos:

1. $8^{2/3} = \sqrt[3]{8}^2 = 2^2 = 4$

2. $\left(-\frac{1}{27}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$

Nota:
Recordar los tipos de exponentes estudiados:

- $a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{\text{"n factores de a"}}; n \in \mathbb{N}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

IV. TEOREMAS DE RADICACIÓN EN IR

Consideramos expresiones bien definidas, entonces se cumple:

A. Raíz de una multiplicación o división

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \; ; \; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{-27.64} = \sqrt[3]{-27}.\sqrt[3]{64}$
   $= -3.4$
   $= -12$

2. $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{64}}$
   $= \frac{4}{3}$

3. $\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2.16}$
   $= \sqrt[5]{32}$
   $= 2$

4. $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}} = \sqrt[4]{\frac{48}{243}}$
   $= \sqrt[4]{\frac{16}{81}}$
   $= \frac{2}{3}$

B. Raíz de una raíz

1. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

2. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo:
$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{6/6} = 2$

Ejemplo:
$\sqrt[12]{(-3)^8} = \sqrt[3.4]{(-3)^{2.4}}$
$= \sqrt[3]{(-3)^2}$
$= \sqrt[3]{9}$

C. Radicales sucesivos

1. $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[mn]{b}.\sqrt[nmp]{c}$

Ejemplo:
$\sqrt{49\sqrt[3]{64\sqrt[3]{2^{30}}}} =$

2. $\sqrt[m]{x^a\sqrt[n]{x^b\sqrt[p]{x^c}}} = x^{\frac{(an+b)p+c}{mnp}}$

Ejemplo:
$\sqrt[3]{5^2\sqrt[4]{5^3\sqrt[5]{5}}} =$

Nota:
En ecuaciones exponenciales de la forma
$x^{x^m} = n; \; (m \neq n)$
Se sugiere elevar a la "m" ambos miembros para lograr la simetría necesaria.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si: $2^{64} = a^a \wedge \sqrt{3}^{54} = (3b)^b$

Halle: $3a + 2b$

UNMSM 2010-II

NIVEL INTERMEDIO

A) 48 B) 96 C) 66
D) 99 E) 44

Resolución:

$a^a = 2^{64} \Rightarrow a^a = 2^{4.16}$

$a^a = 16^{16} \Rightarrow a = 16$

$(3b)^b = \sqrt{3}^{54} \Rightarrow (3b)^b = 3^{27}$

$(3b)^b = 3^{3.9}$

$(3b)^b = (3.9)^9 \Rightarrow b = 9$

Luego:

$3a + 2b = 3(16) + 2(9) = 66$

Respuesta: 66

Problema 2

Si: $x = 3^{2k^2+1}$

Donde k es un número entero no nulo, entonces el valor de $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$

UNMSM 2010-II

NIVEL INTERMEDIO

A) $3^{2k^2-1}(3^{2k^2}+1)$
B) $3^{2k^2} + 3^{2k^2-2}$
C) $3^{2k^2}(3^{2k^2-2}+1)$
D) $3^{2k^2-2}(3^{2k^2+1}+1)$
E) $3^{2k^2-1}(3^{2k^2-1}+1)$

Resolución:

Tenemos:

$M = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$
$M = \sqrt[4]{x}^2 + \sqrt[4]{x}$
$M = \sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x} + 1\right)$

También:

$x^{\frac{1}{4}} = \left(3^{2k^2+1}\right)^{\frac{1}{4}}$
$\sqrt[4]{x} = 3^{2k^2+1}$

Entonces:

$M = 3^{2k^2-1}\left(3^{2k^2-1} + 1\right)$

Respuesta: $3^{2k^2-1}\left(3^{2k^2-1}+1\right)$

Problema 3

Si: $xy = 2$(donde $x > 0$), halle el valor de la expresión.

$$\frac{(4^{x^y})^{x^{-y}}.(x^{y^y}) + (x^2)^{-y}}{2x^{2y} - 6x^{-y}}$$

UNMSM 2005-I

NIVEL FÁCIL

A) 3 B) 11/4 C) 16/5
D) 13/4 E) 16/3

Resolución:

Tenemos

$$M = \frac{\left(4^{x^y}\right)^{(x^y)^{-1}}.\left(x^y\right)^{x^y} + \left(x^y\right)^{-2}}{2\left(x^y\right)^2 - 6\left(x^y\right)^{-1}}$$

$$M = \frac{\left(4^2\right)^{(2)^{-1}}.(2)^2 + (2)^{-2}}{2(2)^2 - 6(2)^{-1}}$$

$$M = \frac{4.4 + \frac{1}{4}}{2.4 - \frac{6}{2}} = \frac{\frac{65}{4}}{5} = \frac{13}{4}$$

Respuesta: 13/4

Pamer ACADEMIAS

POLINOMIOS

DESARROLLO DEL TEMA

Este polinomio tiene la forma:

$$P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

Presenta los siguientes elementos:
Grado: Es el mayor exponente de la variable "x": n.
Coeficiente principal: Es el coeficiente del término que contiene el grado del polinomio: a_0.
Término independiente: Es aquel en el cual no está presenta la variable "x": a_n

I. VALOR NUMÉRICO (V. N.)

Es el valor del polinomio que se obtiene al reemplazar la variable por un valor constante.

Ejemplo:
Sea:

$$P_{(x)} = 3x^2 - 4x + 1$$

Reemplazamos la variable "x" por el valor de 2, obteniendo:

$$P_{(2)} = 3.\ 2^2 - 4.2 + 1 = 5$$

A. Cambio de variable

Es aquella expresión que se obtiene al reemplazar la variable original por otra variable.

Ejemplo:
Sea: $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$
Reemplazamos la variable "x" por la nueva variable "m – 3"
Obtenemos: $P(m-3) = 3(m-3)^2 - 4(m-3) + 1$

B. Valores numéricos notables

Los valores numéricos notables determinan la suma de coeficientes y el término independiente remplazando la "variable" por el valor de uno y cero respectivamente.

$$\Sigma \text{coeficientes} = P_{(1)}$$

$$\text{Término independiente} = TI = P_{(0)}$$

II. OPERACIONES CON POLINOMIOS

A. Adición de polinomios

Al sumar polinomios se reducirán sus términos semejantes. Aquellos que no lo sean; serán colocados conservando su propio signo.

Ejemplo:

1. Dados los polinomios:
$P(x) = 7x^2 + 3x - 5$
$Q(x) = 5x^2 - 2x + 9$
Calcular: $P(x) + Q(x)$

Resolución:
En primer lugar: escribimos los polinomios uno al lado del otro.

$$\overbrace{7x^2 + 3x - 5}^{P(x)} + \overbrace{5x^2 - 2x + 9}^{Q(x)}$$

Ahora seleccionamos los términos semejantes:
$7x^2 + 3x - 5 + 5x^2 - 2x + 9$
Hecho esto reducimos los términos seleccionados obteniendo el resultado:
$12x^2 + x + 4.$

2. Calcular $P(x) + Q(x) + R(x)$; sabiendo que:
$P(x) = 3x^2 + 5$; $Q(x) = 8x^3 + 5x^2 - 1$; $R(x) = 8x + 4$

Resolución:
Colocamos los tres polinomios juntos:
$3x^2 + 5 + 8x^3 + 5x^2 - 1 + 8x + 4$
Los términos semejantes se reducen; los otros son colocados con su propio signo.
$8x^3 + 8x^2 + 8x + 8$, esta es la respuesta.

B. Sustracción de polinomios

La gran diferencia que existe con la suma, es que al polinomio negativo (precedido por un signo –) se le cambiarán previamente, los signos de TODOS sus términos. Luego de esto, se procederá como en la suma.

Ejemplo: Si tenemos:

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 10x - 7$

$Q(x) = x^3 - 7x^2 + 3x - 11$

Calcular: $P(x) - Q(x)$

Resolución:

$$\overbrace{2x^2 + 5x^2 + 10x - 7}^{P(x)} - \overbrace{(x^3 - 7x^2 + 3x - 11)}^{Q(x)}$$

Ojo: Q(x) es el polinomio negativo (observa el signo a su izquierda).
Nota como se han colocado los "( )".

Ahora cambiamos los signos a todos los términos de Q(x).

$2x^3 - 5x^2 + 10x - 7 - x^3 + 7x^2 - 3x + 11$

Seleccionamos términos semejantes y reducimos:

$2x^3 - 5x^2 + 10x - 7x - x^3 + 7x^2 - 3x + 11 = x^3 + 2x^2 + 7x + 4$

C. Multiplicación de polinomios

Se efectúa multiplicando cada uno de los términos de un polinomio con todos los términos del otro polinomio; sumando después los productos obtenidos. Es conveniente ordenar los polinomios según las potencias crecientes (o decrecientes) de una de las variables.

Ejemplo: Multiplicar: $(x^3 + 2x)$ por $(x - 3)$ (método de multiplicación lineal)

$$(x - 3).(x^3 + 2x) = x^4 + 2x^2 - 3x^3 - 6x$$

Ordenando según las potencias: $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x$

III. GRADOS

Es una característica que solo se presentan los polinomios y se le relaciona con los exponentes de las variable, existen dos tipos de grado:

A. Grado relativo (G.R.)

Si tiene un término esta dado por el exponente de la variable referida.

Si tiene más de un término, esta dado por el mayor exponente de la variable referida.

Ejemplo:

* $P_{(x;\,y;\,z)} = 5x^2y^7z^5$

  $GR_x = 2$; $GR_y = 7$; $GR_z = 5$

  (Son los exponentes de cada variable)

* $P_{(x;\,y;\,z)} = 3x^2y^3z^5 + 2x^7y^2 - x^5yz^9$

  $GR_x = 7$; $GR_y = 3$; $GR_z = 9$

  (Son los mayores exponentes de las variables)

B. Grado Absoluto (G.A.)

También llamado grado de polinomio, está dado por la suma de los exponentes de las variables (en el caso que presente un sólo término)

Si tiene más de un término, está dado por la suma de los exponentes de las variables en uno de sus términos.

Ejemplo:

* $P_{(x;\,y;\,z)} = 5x^3y^4z^8$

  $GA = 3 + 4 + 8 = 15$

  (Es la suma de los exponentes de las variables)

* $P_{(x;\,y)} = \underbrace{2x^5y^7}_{12} - \underbrace{5x^4y^2}_{6} + \underbrace{9x^2y^9}_{11}$

  $GA = 12$

  (La mayor suma de los exponentes)

IV. POLINOMIOS ESPECIALES

Entre estos tipos de polinomios destacan los siguientes:

A. Polinomio Homogéneo

Es el polinomio en el cual todos sus términos tienen el mismo grado absoluto, el cual se denomina grado de homogeneidad.

Ejemplo:

$$P_{(x;\,y)} = \underbrace{7x^5y^7}_{12} + \underbrace{\sqrt{5}x^{10}y^2}_{12} + \underbrace{3x^4y^8}_{12}$$

Se observa que el grado de todos los términos es 12, por lo tanto es un polinomio homogéneo. Grado de homogeneidad = 12.

B. Polinomio completo:

Este tipo de polinomio se analiza respecto a una variable, es aquel cuya variable analizada presenta todos los exponentes desde el mayor hasta el exponente cero.

Ejemplo:

$$P_{(x;\,y)} = x^2y^5 + 4x^4y^2 + x^3y + 3x - 7y^8$$

Analizando para la variable "x" se observa que sus exponentes son (2; 4; 3; 1; 0) están todos los exponentes desde el mayor hasta cero. Esto indica que el polinomio es completo respecto a "x".

Analizando para la variable "y" se observa que los exponentes son {5; 2; 1; 0; 8}, falta los exponentes {7; 6; 4; 3}. Esto indica que el polinomio es incompleto con respecto a "y".

C. Polinomio ordenado

Este tipo de polinomio se analiza también respecto a una variable, es aquel cuyos exponentes de las variable solo aumentan o disminuyen.

Ejemplo:

$$P_{(x;\,y)} = x^5y^3 + 4x^3y^2 + x^2y + y^8$$

Analizando para la variable "x" se observa que sus exponentes son {5; 3; 2; 0}, están disminuyendo. Esto indica que el polinomio es ordenado decrecientemente respecto a "x".

Analizando para la variable "y" se observa que los exponentes son {3; 2; 1; 8} están disminuyendo y aumentando a la vez. Esto indica que el polinomio no es ordenado con respecto a "y".

Propiedades

- ✓ En todo polinomio completo y ordenado de una variable, se verifica que el valor absoluto de la diferencia de los exponentes de dos términos consecutivos es igual a la unidad.
- ✓ En todo polinomio completo de una variable el número de términos esta dado por el valor del grado aumentado en uno.

D. Polinomios idénticos

Dos polinomios son idénticos si poseen el mismo grado y sus términos semejantes tienen los mismos coeficientes:

$$P(x) \equiv Q(x)$$

También si dos polinomios son idénticos estos poseen el mismo valor numérico.

$$VN[P_{(x)}] = VN[Q_{(x)}]$$

Ejemplos:

1. Si:
   $(a-3)x^2 + (b+2)x^9 \equiv 5x^9 - 4x^2$. Halle "ab".

   Resolución:
   Este polinomio está reducido y ordenado por lo tanto igualamos los coeficientes de los términos semejantes, generando las siguientes ecuaciones:
   $a - 3 = -4 \rightarrow a = -1$
   $b + 2 = 5 \rightarrow b = 3$
   $\therefore ab = -3$

2. Si $a(x-3) + b(x+2) \equiv 7x - 11$. Calcule: a+b

   Resolución:
   Este polinomio no esta reducido entonces trabajaremos con el valor numérico.
   $x = 3$: $a(3-3) + b(3+2) = 7.3 - 11 \rightarrow b = 2$
   $x = -2$: $a(-2-3) + b(-2+2) = 7(-2) - 11 \rightarrow a = 5$
   $\therefore a+b = 7$

E. Polinomio Idénticamente Nulo

Es aquel polinomio reducido en el cual todos los coeficientes de sus términos son nulos (cero).
Notación: $P_{(x)} \equiv 0$
También si el polinomio es idénticamente nulo entonces su valor numérico es igual a cero:

$$VN[P_{(x)}] = 0$$

Ejemplos:

1. Si: $(m-1)x^3 + (n-5)x^4 \equiv 0$. Halle "m"

   Resolución:
   Este polinomio está reducido y ordenado, por lo tanto igualamos los coeficientes a cero, generando las siguientes ecuaciones.
   $m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$
   $n - 5 = 0 \rightarrow n = 5$
   $\therefore m^n = 1^5 = 1$

2. Si: $a(x-3) + b(x+2) - 3x + 4 \equiv 0$. Calcule: ab.

   Resolución:
   Este polinomio no esta reducido, entonces trabajaremos con el valor numérico:
   $x = 3$; $a(3-3) + b(3+2) - 3 \cdot 3 + 4 = 0 \rightarrow b = 1$
   $x = 2$; $a(-2;-3) + b(-2+2) - 3(-2) + 4 = 0 \rightarrow a = 2$
   $\therefore ab = 2$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si: $F_{(z)} = z - \frac{1}{z}$; halle el valor de:

$$f(f_{(1)} + \frac{1}{f_{(2)}}) + f_{(-2)}$$

A) $-\frac{5}{2}$ B) $-\frac{7}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $-\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

UNMSM 2014-I

Resolución:

- $F_{(1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0$. $f_{(2)} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $F_{(-2)} = -2 - \frac{1}{-2} = -\frac{3}{2}$

Reemplazando:

$$f(f_{(1)} + \frac{1}{f_{(2)}}) + f_{(-2)} = f_{(0+\frac{1}{\frac{3}{2}})} + \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= f\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{2} = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{\frac{2}{3}}\right] - \frac{3}{2}$$

$$f(f_{(1)} + \frac{1}{f_{(2)}}) = \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right] - \frac{3}{2} = -\frac{7}{3}$$

Respuesta: −7/3

Problema 2

El polinomio:

$$P_{(x)} = nx^{n+5} + (n+1)x^{n+6} + (n+2)x^{n+7} + \ldots$$

Es ordenado y completo. Halle el grado del polinomio P(x).

A) 5 B) 4 C) 3
D) 6 E) 7

UNMSM 2014-I

Resolución:

Como P(x) es ordenado y completo además los exponentes de "x" están en forma ascendente, luego:
$n + 5 = 0 \rightarrow n = -5$
Reemplazando en P(x):
$P(x) = -5 - 4x - 3x^2 - 2x^3 - x^4$

Nos piden: grado = 4

Respuesta: 4

Problema 3

Si: $f_{(x-3)} = x^2 + 1$ y $h_{(x+1)} = 4x + 1$

Halle el valor de: $h_{(f(3)} + h_{(-1)})$.

A) 117
B) 145
C) 115
D) 107
E) 120

UNMSM 2013-I

Resolución:

Calculando $f_{(3)}$:

$x-3=3 \Rightarrow x= 6$; reemplazando en $f(x-3)$

$f_{(3)} = 6^2 + 1 = 37 \Rightarrow f_{(3)} = 37$

Calculando: $h_{(-1)}$

$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2$; reemplazando en $h_{(x+1)}$:

$h_{(-1)} = 4(-2)+1 = -7 \Rightarrow h_{(-1)} = -7$

Luego:

$h(f_{(3)} + h_{(-1)}) = h_{(37-7)} = h_{(30)}$

$x + 1 = 30$ $x = 20$, reemplazando en $h_{(x+1)}$:

$h_{(30)} = 4(29) + 1 = 117$

$\therefore h(f_{(3)} + h_{(-1)}) = 117$

Respuesta: 117

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN

Es la operación donde se busca obtener dos polinomios llamados cociente (q(x)) y resto (r(x)); a partir de dos polinomios llamados dividendo (D(x)) y divisor (d(x)).

II. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

$$D(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

Donde:

- grad[r(x)] < grad[d(x)]
- $\text{grad}[r(x)]_{máx} = \text{grad}[d(x)] - 1$
- grad [q(x)] = grad [D(x)] – grad[d(x)]

Ejemplo:

$x^3 + x^2 - x + 9 = (x + 2)(x^2 - x + 1) + 7$

$D(x) = x^3 + x^2 - x + 9$

$d(x) = x + 2$

$q(x) = x^2 - x + 1$

$R(x) = 7$

A. Clases de división

Exacta: Si r(x) = 0

- D(x) = d(x) q(x)
- D(x) es divisible por d(x).
- d(x) es un divisor o un factor de D(x).

Inexacta: Si $r(x) \neq 0$

$D(x) = d(x)\, q(x) + r(x)$

III. MÉTODOS DE DIVISIÓN DE POLINOMIOS

1. Método de Horner

Ejemplo:

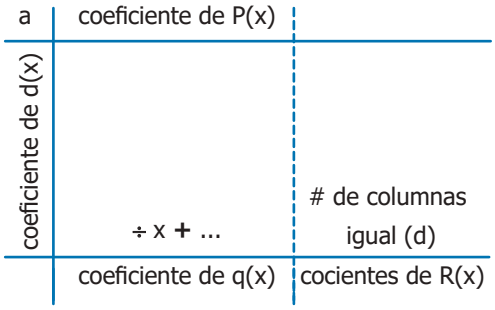
Efectuar: $\dfrac{15x^5 - x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8}{-2x + 5x^2 - 2}$

Nota:
Si R(x) ≡ 0 se dice que D(x) ÷ d(x) es exacta, además D(x) ≡ d(x) . q(x); pues el residuo R(x) ≡ 0 es nulo.

1. Ordenar y completar al dividendo y divisor:

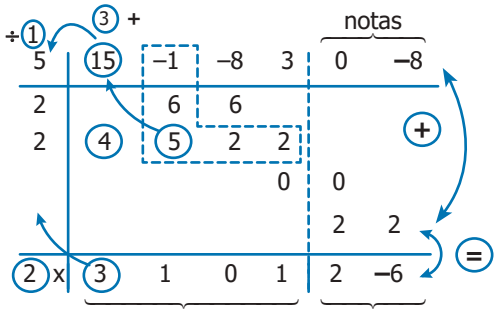
$$\frac{15x^5 - x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 0x - 8}{5x^2 - 2x - 2}$$

2. Armar el esquema de Horner según:



Nota:
D(x) y d(x) deben esta completos y ordenados en forma descendente.

Luego para el ejemplo:



$q(x) = 3x^3 + x^2 + 1$; $R(x) = 2x - 6$

Procedimiento

1. Dividiendo el primer coeficiente del D(x) entre el primero de d(x).
2. El resultado se coloca como el primero coeficiente de q(x) y se multiplica con cada coeficiente de d(x) a excepción del primero.
3. Los resultados anteriores se colocan debajo de los coeficientes de D(x) corriendo un lugar a la derecha. Luego sumar y repetir pasos.

Nota:
Hemos colocado la línea divisora contando 2 columnas, pues el grado (d) = 2.

2. Método de Ruffini

Nos permite efectuar

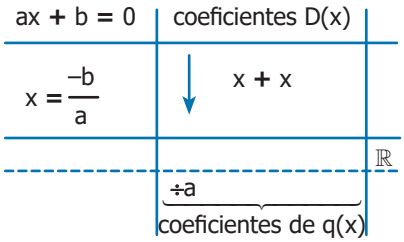
$$\frac{P(x)}{ax+b}$$

Ejemplo 1:

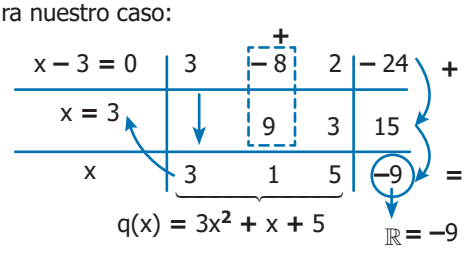
Caso a = 1

Efectuar: $\frac{3x^3-8x^2+2x-24}{x-3}$

1. Observe que d(x) = x – 3 en este caso a = 1, b = –3.
2. Arme el esquema D(x).



Para nuestro caso:



Procedimiento:

1. El primer coeficiente de D(x) pasa por el grupo de los coeficientes de q(x) y multiplica al valor despejado de "x".
2. El resultado se coloca debajo de los coeficientes de D(x) corriendo un lugar a la derecha.
3. Se suma el resultado vuelve a multiplicarse con "x".
4. Cuando a ≠ 1 un paso adicional que realizar veamos el otro ejemplo.

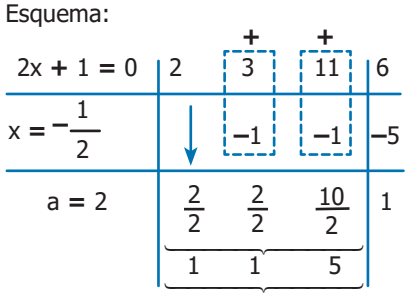
Ejemplo 2.

Caso a ≠ 1

Efectuar:

$$\frac{2x^3+3x^2+11x+6}{2x+1}$$

1. Observe que d(x) = 2x + 1 en este caso a = 2; b = 1
2. Esquema:



q(x) = x² + x + 5

R(x) = 1

3. Observe que cuando a ≠ 1 tenemos que dividir entre "a" antes de hallar los coeficientes de q(x).

Nota:
El residuo en este método siempre es una constante. Los polinomios también deben estar completos y ordenados.

IV. TEOREMA DEL RESTO

La aplicación permite obtener residuos sin efectuar la división.

Nota:
Sea el polinomio P(x) no constante. El resto de dividir P(x) entre ax + b es R = P(–b/a).

Ejemplo 1

P(x) = (ax + b) q(x) + ℝ

Si x = –b/a

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=\left[a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right]q(x)+\mathbb{R}$$

Luego: $R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$

Ejemplo 2

Halle el residuo de: $\frac{2x^2+ax+2}{2x-1}$

Solución

Como el divisor d(x) = ax + b = 2x – 1

$$x=-\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

P(x) = 2x² + 9x + 2

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2+9\left(\frac{1}{2}\right)+2=7$$

1. Regla práctica

Para hallar el residuo: $\frac{P(x)}{ax+b}$

1. Iguale $ax + b = 0$

   Despeje $x = -\frac{b}{a}$ que es un valor conveniente.
2. Evalúe P(x) en $x = -\frac{b}{a}$

   Luego de residuo es:

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Problema:

Halle el residuo en: $\frac{x^{30} - x^{10} + x^5 - 3}{x^2 + 1}$

Solución:

1. $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$ un valor conveniente.
2. $P(x) = x^{30} - x^{10} + x^5 - 3$

   $P(x) = (x^2)^{15} - (x^2)^5 + (x^2)^2\, x - 3$

   $x^2 = -1$

   $R = (-1)^{15} - (-1)^5 + (-1)^2\, x - 3$

   $\therefore R = x - 3$

V. TEOREMA DEL FACTOR

1. Un polinomio P(x) de grado no nulo se anula para $x = \alpha \leftrightarrow P(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$, luego $(x - \alpha)$ es un factor de P(x).
2. Si f(x) es divisible por g(x) y g(x) es divisible y la diferencia de f(x) y g(x) es divisible por h(x).
3. Si f(x) y g(x) son divisibles por h(x) la suma y la diferencia de f(x) y g(x) es divisible por h(x).
4. Si f(x) es divisible por g(x), el producto de f(x) por cualquier otro polinomio no nulo h(x) es tambien divisible por g(x).
5. Si el polinomio P(x) es divisible separadamente por los binomios $(x - a)$, $(x - b)$ y $(x - c)/a \neq b \neq c$, entonces P(x) es divisible por el producto.
   $(x - a)(x - b)(x - c)$.

Nota:
Recíprocamente, si P(x) es divisible por $(x - a)(x - b)(x - c)$; $a \neq b \neq c$, será divisible separadamente por $(x - a)$, $(x - b)$ y $(x - c)$.

6. Si al dividir un polinomio P(x) entre $(x - a)$, $(x - b)$ y $(x - c)/a \neq b \neq c$ en forma separada deja el mismo resto en cada caso entre $(x - a)(x - b)(x - c)$ dejara el mismo resto común.

   Así: $P(x) \div (x - a) \Rightarrow R_1(x) = R$

   $P(x) \div (x - b) \Rightarrow R_2(x) = R$

   $P(x) \div (x - c) \Rightarrow R_3(x) = R$

   $\Rightarrow \quad P(x) \div (x - a)(x - b)(x - c) \Rightarrow R(x) = R$
7. En toda división de polinomios, si al dividendo y al divisor, se les multiplica por un polinomio de grado no nulo, el cociente no se altera, pero el residuo queda multiplicado por dicho polinomio.
8. En toda división de polinomios, si al dividendo y al divisor se les divide por un polinomio de grado no nulo, el cociente no se altera; pero el residuo queda dividido por dicho polinomio.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

¿Qué condición deben cumplir los números reales b y c para que el polinomio $x^2 + bx + x$ sea divisible por $x - 1$?

A) $b - c = 1$
B) $b + c = 1$
C) $x - b = 2$
D) $b - c = -1$
E) $b + c = -1$

UNMSM 2010 - II

Resolución:

Tenemos:

$P(x) = d(x) \cdot Q(x) + 0$

$x^2 + bx + c = (x\ B1).Q(x)$

Para $x = 1$: $1^2 + b(1) + C = 0$

$b + c = -1$

Respuesta: E) b + c = −1

Problema 2

Si el polinomio P(x) se divide por $(x - 2)$; el cociente es $x^2 + 2x + 1$ y el residuo es "r". Pero si P(x) se divide por $(x - 4)$, el residuo es $(-r)$. ¿Cuál es el valor de "r"?

A) 25 B) −25
C) 20 D) −20
E) 0

UNMSM 2009-II

Resolución:

Tenemos:

$P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 1) + t$

$P(x) = (x - 4)\, Q(x) - r$

Entonces:

$(x-2)(x^2 + 2x + 1) + r = (x-4)Q(x) - r$

Para $x = 4$

$(4-2)(4^2 + 2 \cdot 4 + 1) + r = (4-4)Q(4) - r$

$2 \cdot 25 + r = 0 - r$

$r = -25$

Respuesta: B) −25

Problema 3

El resto de la división de un polinomio P(x) entre $x^2 + 3x + 2$ es $2x + 3$; y entre $x^2 + 2x - 3$ es $x - 2$. Hallar el resto de la división de P(x) entre $x^2 - 1$.

A) $-x + 2$
B) $-3x + 5$
C) $-x$
D) $2x - 1$
E) $2x - 3$

UNMSM 2004-I

Resolución:

$P(x) = (x + 2)(x + 1) - 8(x) + 2x + 3$

$\rightarrow P(1) = 1$

$P(x) = (x + 3)(x - 1)Q(x) + x - 2$

$\rightarrow P(1) = -1$

$P(x) = (x^2 - 1)\,Q_2(x) + Ax + B \rightarrow$

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ -A + B = 1 \end{cases}$$

$B = 0$

$A = -1$

Respuesta: C) $-x$

Pamer ACADEMIAS

FACTORIZACIÓN – MCM Y MCD

DESARROLLO DEL TEMA

FACTORIZACIÓN

I. DEFINICIÓN

La factorización es un proceso contrario a la multiplicación, el cual no está sujeta a reglas, específicas, su operación depende de la práctica adquirida. En esencia es la transformación de un polinomio en un producto indicado de factores primos dentro de un determinado campo numérico.

Un polinomio está definido sobre un campo numérico, cuando los coeficientes de dichos polinomios pertenecen al conjunto numérico asociado a dicho campo.

Hay tres campos de importancia.

- Racional ($\mathbb{Q}$)
- Real ($\mathbb{R}$)
- Complejo ($\mathbb{C}$)

Ejemplo:

i) $P(x) = 2x^2 - 7x + 3$, está definido en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

ii) $Q(x) = \sqrt{2}x^5 + 3x - \sqrt{3}$, está definido en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, pero no en $\mathbb{Q}$.

iii) $R(x) = x^3 - ix + 2i - 3$; está definido solo en: $\mathbb{C}(i = \sqrt{-1})$

A. Factor o divisor

Es un polinomio de grado distinto de cero que divide exactamente a otro.

B. Factor primo

Es un polinomio sobre un campo numérico el cual no se puede transformar en el producto de dos polinomios sobre el mismo campo numérico.

Ejemplo:

1. $P(x) = x^2 - 36$
   No es primo en $\mathbb{Q}$, ni en $\mathbb{R}$; ni en $\mathbb{C}$, ya que puede expresarse como:
   $P(x) = (x + 6)(x - 6)$
2. $Z(x) = x^2 - 7$
   Es primo en $\mathbb{Q}$ pero no en , ni en $\mathbb{C}$ dado que:
   $R(x) = (x + 4i)(x - 4i)$

C. Número de factores primos

En la cantidad de factores no repetidos que tienen el polinomio, dependiendo sobre que campo numérico se factorice.

Ejemplo:

a) $P(x) = x^4 - 36 = (x^2 + 6)(x^2 - 6)$
$\Rightarrow P(x) =$ tiene 2 factores primos en $\mathbb{Q}$.

b) $P(x) = x4 - 36 = (x^2 + 6)(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$
$\Rightarrow P(x)$ tiene 3 factores primos en $\mathbb{R}$.

c) $P(x) = x^4 - 36 = (x + i\sqrt{6})(x - i\sqrt{6})(x + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{6})$
$\Rightarrow P(x)$ tiene 4 factores primos en $\mathbb{C}$.

II. MÉTODOS PARA FACTORIZAR

A. Método de factor común

El factor común esta contenido en todos los términos de la expresión algebraica a factorizar, con el menor exponente; puede ser monómico o polinómico.

Ejemplos:

1. Factorizar
   $N = 2x^4y^3 + 2x^4z^2 + 2x^4$

Resolución:

El factor común es: $2x^4$ de donde.
$N = 2x^4(y^3 + z^2 + 1)$

Factorizar

$A = (a^2 + b)x + (a^2 + b)y + (a^2 + b)z$

Resolución:

El factor común en este caso es: $(a^2 + b)$, de donde:
$A = (a^2 + b)(x + y + z)$

B. Factorización por agrupación de términos

Consiste en agrupar convenientemente de forma que se tenga factor comunes polinómicos.

Ejemplo:

Factorizar: $P = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

Resolución:
Desarrollando por productos notables.
$P = a^2x^2 + 2abx + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$

Simplificando:
$P = a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2$
Agrupando el primero con el tercero y el segundo con el cuarto, se tiene:
$P = (a^2x^2 + a^2y^2) + (b^2y^2 + b^2x^2)$
$P = a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2)$
$P = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

C. Método de Identidades

1. Diferencia de cuadrados

Para factorizar se extrae la raíz cuadrada de los cuadrados perfectos y se forman un producto de la suma de las raíces.
Multiplicadas por la diferencia de las mismas. En geberal:

$$a^{2m} - b^{2n} = (a^m + b^n)(a^m - b^n)$$

$\sqrt{\downarrow}$ $\sqrt{\downarrow}$
a^m b^n

2. Trinomio cuadrado perfecto

Su forma general es:

$$a^{2m} \pm 2a^nb^n = b^{2m}$$

$\sqrt{\downarrow}$ $\sqrt{\downarrow}$
a^m $b^n \rightarrow a^m b^n$
a^m $b^n \rightarrow a^m b^n$
$2a^m b^n$
(iguales)

$$a^{2m} \pm 2^{am}b^n + b^{2n} = (a^m \pm b^n)^2$$

3. Suma o diferencia de cubos

En esta base recordamos los productos notables.

$$a^{3m} + b^{3n} = (a^m + b^n)(a^{2m} - a^mb^n + b^{2n})$$
$$a^{3m} - b^{3n} = (a^m - b^n)(a^{2m} + a^mb^n + b^{2n})$$

Ejemplos:
Factoreizar:
$F = x^8 - 81y^8$

Resolución: Extrayendo $\sqrt{\ }$ a los térmios, se obtiene:

$F = x^8 - 81y^8$
$\sqrt{\downarrow}$ $\sqrt{\downarrow}$
Suma $\rightarrow$ x^4 $9y^4$
$\sqrt{\downarrow}$ $\sqrt{\downarrow}$
Suma x dif $\rightarrow$ x^2 $3y^2$

De donde: $F = (x^4 + 9y^4)(x^2 + 3y^2)(x^2 - 3y^2)$

Factorizar:
$P = (a + b)^7 + c^3(a + b)^4 - c^4(a + b)^3 - c^7$

Resolución:
Haciendo $(a + b) = x$, se tendría.
$P = x^7 + c^3x^4 - c^4x^3 - c^7$

Factorizando de 2 en 2
$P = x^4(x^3 + c^3) - c^4(x^3 + c^3)$

Siendo el factor común: $x^3 + c^3$
$P = (x^3 + c^3)(x^4 - c^4)$

Factorizando la suma de cubos y la diferencia de cuadrado, obtenidos finalmente.
$P = (x + c)(x^2 - xc + c^2)(x^2 + c^2)(x + c)(x - c)$

Factorizar:
$M = 3ab(a + b) + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2$

Resolución
Factorizando: $3(a + b)$; se tiene:
$M = 3(a + b)[ab + c(a + b) + c^2]$
$M = 3(a + b)[ab + ac + bc + c^2]$

Factorizando en el corchete 2 de 2:
$M = 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$
Siendo: $(b + c)$ el factor coún, se tendría como factores.

$M = 3(a + b)(a + c)(b + c)$

III. MÉTODO DE ASPA SIMPLE

Se aplica en expresiones trinomias de la forma:

$$ax^{2m} + bx^my^n + cy^{2n}$$

Se descompone en factores los extremos y la suma de los productos en aspa debe ser igual al término central. Es decir dado:

$ax^{2m} + bx^my^n + cy^{2n}$
$a_1x^m \rightarrow c_1y^n \rightarrow a_2c_2$
$a_2x^m \rightarrow a_2y^n \rightarrow a_nc_2$
b

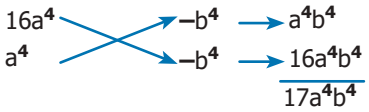
Los factores se toman horizontalmente:
$(a^1x^m + c^1y^n)(a^2x^m + c^2y^n)$

Ejemplo: Factorizar:
$P = 64a^{12}b^3b^3 - 68a^8b^7 + 4a^4b^{11}$

Resolución
Siendo el factor común: $4a^4b^3$
Se obtiene:

$P = 4a^4b^3\,[16a^8 - 17a^4b^4 + b^8]$

Aplicando aspa simple al corchete.



$P = 4a^4b^3\,(16a^4 - b^4)(a^4 - b^4)$

Factorizando la diferencia de cuadrados; obtenemos:
$P = 4a^4b^3(4a^2 + b^2)(2a - b)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

Factorización por aspa doble este método es aplicable para poinomios de la forma:

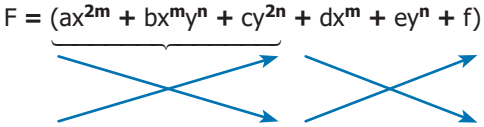
$$ax^{2m} + bx^my^n + c^{y2n} + dx^m + ey^n + f$$

El polinomio debe presentar cierto orden para poder factorizarlo.

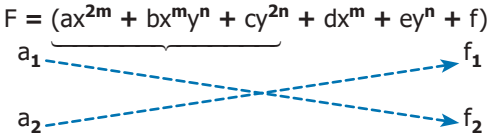
1. Debe tener 6 términos, si falta alguno de ellos, se reemplaza por ceros.
2. Con respecto al primer trinomio, los exponentes centrales deben ser la mitad de los extremos y en el cuarto y quinto término se repiten los exponentes centrales.

Forma de factorizar

1. Estando ordenado los términos del polinomio, se trazan dos aspas de la siguiente forma:



2. Descomponemos en factores los coeficientes de lso términos extremos multiplicados en aspa y sumados deben verificar "al cuarto término".



Deben cumplir que:

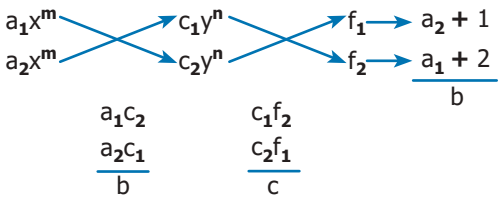
$$\begin{array}{r} a_1\,f_2 \\ a_2\,f_1 \\ \hline d \end{array}$$

3. A continuación descomponemos en factores el coeficiente del tercer término. La primera aspa debe verificar al coeficiente del segundo término y la segunda aspa debe verificar el coeficiente del quinto término.

4. Los factores se obtienen tomando las técnicas de las aspas en forma horizontal.

En conclusión:

$F = ax2m + bx^my^n + cy^{2n} + dx^m + ey^n + f$

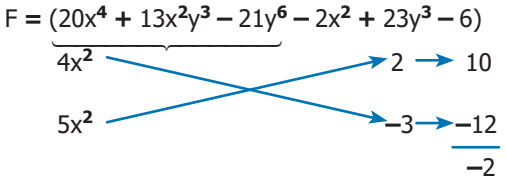


$f = (a_1x^m + c_1y^n + f_1)(a_2x^m + c^2y^n + f_2)$

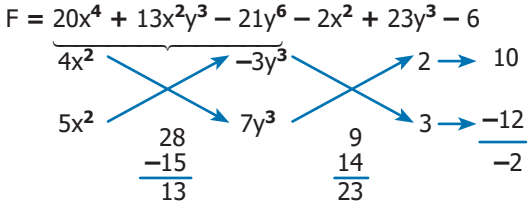
Ejemplo:

Factorizar:
$F = 20x^4 - 21y^6 + 13x^2y^3 - 2x^2 + 23y^3 - 6$

Resolución:
Ordenando el polinomio deacuerdo a las reglas dadas, se tiene:



Dado que está verificado el cuarto término, descomponemos en factores el "tercer término".

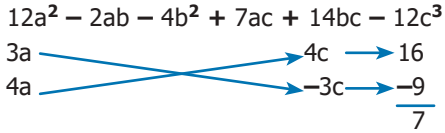


Como se han verificado todos los términos, los factores son:

$$F = (4x^2 - 3y^2 + 2)(5x^2 + 7y^3 - 3)$$

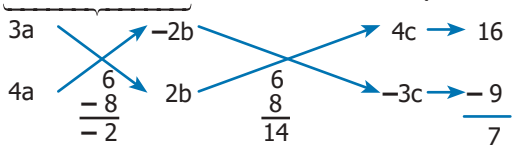
Ejemplo:
Factorizar:
$P = 12a^2 - 4b^2 - 12c^2 - 2ab + 7ac + 14ac$

Resolución:
Ordenando convenientemente, se tendría:



Dado que el cuarto término está verificado, descomponemos en factores el tercer término.

$P = \underbrace{12a^2 - 2ab - 4b^2} + 7ac + 14bc - 12c^2)$



Como todos los términos están verificados, entonces:

$P = (3a - 2b + 4c)(4a + 2b - 3c)$

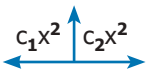
Doble Aspa: Caso especial

Polinomio de cuarto grado

El polinomio a factorizar debe tener cinco términos o en su defecto debe completarse con ceros, su forma canónica es:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

El problema central consiste en descomponer cx^2 en dos términos, dispuestos en la siguiente forma:



tal que: $c_1 + c_2 = c$

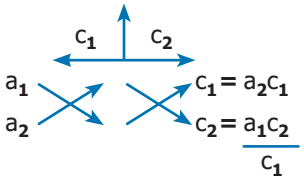
Forma de factorizar:

1. Se descompone en factores los coeficientes de los términos externos del polinomio de cuarto grado, de forma que:

$$a = a_1 \cdot a_2 \quad y \quad c = c_1 \cdot c_2$$

Multiplicando en aspa y sumando los productos respectivos, obtenemos c_1, es decir:

$f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dc + c$

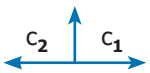


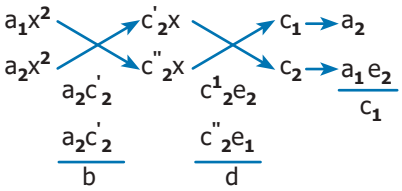
Luego se obtiene por diferencia:

$$c_2 = c = c_1$$

2. c_2 se descompone en factores:
$c_2 = c'_2 \cdot c_2'$ donde la primera aspa verifica a b y la segunda aspa veridia a α.

$f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$





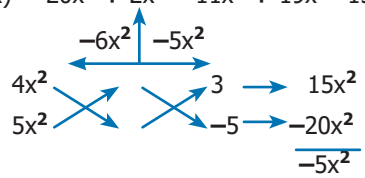
3. Los factores se toman horizontalmente:
$f = (a_1x^2 + c'2x + c_1)(a_2x^2 + c'_2x + c_2)$

Ejemplo:
Factorizar:
$P(x) = 20x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 19x - 15$

Resolución:

Descomponiendo en factores los términos extremos, para determinar c_1 se tendría.

$P(x) = 20x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 19x - 15$



$\therefore P(x) = (4x^2 - 2x + 3)(5x^2 + 3x - 5)$

Factorización por divisores binomios

Este método se basa en el criterio del teorema del resto.

i) Si: P(x) es divisible entre (x – a), entonces: P(a) = 0

ii) Si: P(x) es divisible entre (x + b), entonces P(–b) = 0

Observando en forma inversa:

i) Si: P(x) = 0; entonces un factor es (x – a)
ii) Si: P(x) = 0; entonces un factor es (x + b)

Caso de polinomios mónicos

El polinomio mónico se caracteriza porque el coeficiente de su máxima potencia es igual a la unidad.

1. Se hallan todos los divisores del término independiente del polinomio P(x) a factorizar, los divisores se consideran con el signo más y menos.

2. Cada divisor con signo (+) o signo (–) se evalúa en P(x), si alguna de las evaluaciones vale cero, hemos encontrado un factor lineal.

3. Se recomienda encontrar una cantidad de ceros igual al grado del polinomio P(x) menos dos.

4. Los demás factores se encuentran aplicando la regla de Ruffini.
Ejemplo: Factorizar: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15$

Resolución:
Nótese que el polinomio es de cuarto grado, entonces.

1° La cantidad de ceros a encontrar por evaluación es: $4° - 2° = 2$

2° Los divisores del término independiente 15 son $\pm(1; 3; 5; 15)$

3° Evaluando
a) $f(1) = 1 - 2 - 16 + 2 + 15 = 0$
entonces un factor es: $(x - 1)$

b) $f(-1)=(-1)^4-2(-1)^3-16(-1)^2+2(-1)+15$
$f(0) = 0$; entonces otro factor lineal es: $(x + 1)$.

4° Por la regla de Ruffini

$x - 1 = 0$	1	−2	−16	+2	+15
$x = 1$		1	−1	−17	−15
$x + 1 = 0$	1	−1	−17	−15	0
$x = -1$		−1	+2	+15	
	1	−2	−15	0	

$\therefore P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 2x - 15)$

El factor cuadrático es más fácil de factorizar, obteniendose.
$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 5)(x + 3)$

Caso de polinomios no mónicos.
Sea P(x) el polinomio a factorizar:

1° Se hallan los divisores correspondienyes al término independiente de P(x) y los divisores correspondientes al coeficiente de la máxima potencia.

2° Los divisores a evaluar son los divisores del término independiente más las fracciones que se obtiene al dividir los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente de la máxima potencia.
Ejemplo:
Factorizar:
$P(x) = 6x^5 + 13x^4 - 29x^3 - 4^3x^2 - x + 6$

Resolución:
Como el polinomio es de grado 5 a lo más debemos encontrar "3" ceros.
Los divisores del primer coeficiente y del término independiente son:

$P(x) = 6x^5 + 13x^4 - 29x^3 - 43x^2 - x + 6$
$\pm(1; 2; 3; 6)$ $\pm(1; 2; 3; 6)$

$\therefore$ Los divisores a evaluar son:

$$(1; 2; 3; 6; \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{3}; \tfrac{1}{6}; \tfrac{3}{2}; \tfrac{2}{3})$$

Evaluando:

1° $P(-1) = 6(-1)^5 + 13(-1)^4 - 29(-1)^3 - 43(-1)^2 - (-1) + 6$
$P(-1) = 0 \Rightarrow$ un factor es: $(x + 1)$

2° $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + 13\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 29\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6$

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ otro factor es : $\left(x + \frac{1}{2}\right)$

3° $P\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^5 + 13\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 29\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 4^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) + 6$

$P\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$ otro factor es : $\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Aplicando Ruffini se tendría:

$x = -1$	6	+13	−29	−43	−1	+6
	↓	− 6	−7	+36	+7	−6
$x = \frac{1}{2}$	6	7	−36	−7	+6	0
	↓	−3	−2	+19	−6	
$x = \frac{1}{3}$	6	+4	−38	+12	0	
	↓	+2	+2	−12		
	6	+6	+36	0		

$\therefore P(x) = (x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(6x^2 + 6x - 36)$

Simplificando y factorizando el término cuadrático se obtiene:
$P(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x - 1)(x + 3)(x - 2)$

Factorización de expresiones recíprocas:
Las expresiones recíprocas se caracterizan porque los términos equidistantes de los extremos son iguales.

Debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. Si la expresión es recíproca de grado impar uno de sus factores es $(x + 1)$ y este factor estará multiplicando por una expresión recíproca de grado par.
2. Si la expresión es recíproca de grado par los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales y el último término es positivo.
Ejemplo: $P(x) = ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2\ bx + a$

Formas de factorizar:
1. Se factoriza la variable que se encuentra elevado a un exponente igual a la mitad del grado de la expresión dada.
2. Se agrupan los términos equidistantes de los extremos quedando en cada grupo un término en x y su recíproco.
3. Se reemplaza el grupo de menor potencia por

una letra diferente de x y las otras potencias se encuentran en función de esta letra.

Ejemplo:

Factorizar:

$$P(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35 + 6$$

Resolución:

Dado que el grado de P(x) es 4; factorizamos: x^2; obteniendo:

$$P(x) = x^2\left[6x^2 + 35x + 65 + \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2}\right]$$

Agrupando los términos equidistantes de los extremos:

$$P(x) = x^2\left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62\right]$$

Haciendo: $x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

con lo cual:

$P(x) = x^2[6(a^2 - 2) + 35(a) + 62]$

$P(x) = x^2\,[6a^2 + 35a + 5a]$

Por aspa:

$6a + 35a + 50$

$3a \times 10 \rightarrow 20a$

$2a \times 5 \rightarrow 15a$

$35a$

$P(x) = [3a + 10][2a + 5]$

Como: $x + \frac{1}{x} = a$; se tendría

$$P(x) = x^2\left[3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10\right]\left[2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5\right]$$

$$P(x) = (3x^2 + 10x + 3)(2x^2 + 5x + 2)$$

Nuevamente por aspa simple:

$P(x) = (3x + 1)(x + 3)(2x + 1)(x + 2)$

MCD Y MCM

I. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El máximo común divisor de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado y menor coeficiente numérico(prescindiendo de los signos) que es factor (o divisor) de los polinomios dados.

- Para hallar el MCD de varios polinomio se procede de la forma siguiente:
  1. Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores de la forma siguiente.
  2. El MCD es el producto obtenido al tomar todos los factores comunes elevando a la menor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

Ejemplo:

Dados los polinomios:

$A = 24a^5b^2c^6$; $B = 18a^3b^4c^5$

Como: $A = 2^3 \cdot 3 \cdot a^5\, b^2\, c^6$

$B = 2 \cdot 3^3 \cdot a^3\, b^4\, c^5$

Luego: $MCD(A; B) = 2 \cdot 3a^3\, c^5$

El cuál es la expresión de mayor G.A. que está contenida en A y B simultáneamente.

Determinar el MCD de:

$$A = 2x^2 + 2xy \wedge B = 4x^2 - 4xy$$

Factorizando: $A = 2x(x + 4)$

$B = 2^2\, x(x - 4)$

MCD. (A ; B) = 2x

Observación:

Dos o más polinomios son primos entre sí, si su MCD es la unidad. Dos o más polinomios son primos entre sí, si su MCD es la unidad.

II. EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

En dos o más polinomios el polinomio de mayor grado y mayor coeficiente (prescindiendo de los signos) del cual es factor (o divisor) cada uno de los polinomios dados.

- Para hallar el MCM de varios polinomios se procede de la forma siguiente.
  1. Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores primos (se caracteriza).
  2. El MCM es el producto obtenido al tomar todos los factores, comunes y no comunes elevados a la mayor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

Ejemplos:

Dados los monomios:

$A = 160x^7 \cdot y^3\, z^2$; $B = 192x^4y^6w$

Como: $A = 25 \cdot 5x^7\, y^3\, z^2$

$B = 26 \cdot 3x^4\, y^6\, w$

Luego: $MCM(A; B) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5x^7y^6z^2w$

Finalmente: $MCM(A; B) = 960x^7y^6z^2w$

El cual es la expresión de menor G.A. que contiene exactamente a A y B simultáneamente.

Se tienen los polinomios:

$P = 5x^3(x+ 1)^2\,(3x + 1)(x^2 - x + 1)^7$

$Q = 3x^2(x + 1)^4(3x - 1)(x^2 - x + 1)$

Se obtiene:

$MCM\,(P; Q) = 15x^3(x+1)^4(3x+1)(3x-1)(x^2-x+1)^7$

Siendo este polinomio, el de menor G.A. que contiene a las expresiones P y Q.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

$P(x) = x^5 + x + 1$

A) $P(x) = (x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1]$
B) $P(x) = (x^3 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1]$
C) $P(x) = (x^4 + x + 1)[x^2(x + 1) - 1]$
D) $P(x) = (x^5 + x + 1)[x^2(x - 1) - 1]$
E) $P(x) = (x^3 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1]$

Resolución:

Restando y sumando x^2, se tiene:

$P(x) = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$

$P(x) = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$P(x) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

Extrayendo el factor común:

$x^2 + x + 1$, se tiene

$P(x) = (x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1]$

Respuesta: A) $P(x) = (x^2 + x + 1)[x^2(x-1) + 1]$

Problema 2

$P(x) = x^7 + x^2 + 1$

A) $P(x) = (x^3+x+1)(x^5-x^4+x^2- x+1)$
B) $P(x) = (x^4+x-1)(x^5-x^4+x^2- x+1)$
C) $P(x) = (x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2- x+1)$
D) $P(x) = (x^3-x+1)(x^4-x^4+x^2- x+1)$
E) $P(x) = (x^2+x+2)(x^4-x^4+x^2- x+1)$

UNMSM 2004-I

Resolución:

Restando y sumando x^4, tal como sigue:

$P(x) = x^7 - x^4 + x^4 + x^2 + 1$

$P(x) = x^4(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1)$

$P(x)=x^4(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Extrayendo el factor común: $x^2 + x + 1$

resulta:

$P(x)=(x^2 + x + 1)[x^4(x-1)+(x^2-x+1)]$

Finalmente:

$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$

Respuesta: C) $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$

Problema 3

$R(m) = (m^2 + 5m + 5)^2 - 12m(m + 5) - 49$

A) $R(m) = (m + 4)(m - 1)(m + 4)(m + 1)$
B) $R(m) = (m + 3)(m - 1)(m + 4)(m + 1)$
C) $R(m) = (m + 5)(m - 1)(m + 4)(m + 1)$
D) $R(m) = (m + 1)(m - 1)(m + 4)(m + 1)$
E) $R(m) = (m + 6)(m - 1)(m + 4)(m + 1)$

UNMSM 2006-I

Nivel Intermedio

Resolución:

Efectuando convenientemente el 2° grupo de términos y descomponiendo:

$-49 = -60 + 11$

Se tendrá:

$R(m)=(m^2+5m+5)^2-12(m^2+5m)-60+11$

Factorizando: (-12) en la demarcación, resulta:

$R(m) = (m^2+5m+5-11)(m^2+5m+5-1)$

$R(m) = (m^2 + 5m - 6)(m^2 + 5m + 4)$

Respuesta: E) $R(m) = (m + 6)(m - 1)(m + 4)(m + 1)$

Pamer ACADEMIAS

TEORÍAS DE ECUACIONES

DESARROLLO DEL TEMA

I. ECUACIONES POLINOMIALES

Sea el polinomio:

$$P_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 ;\ a_n \neq 0$$

Tenemos entonces la ecuación polinomial:

$$P_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$$

A. Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio:

$$P_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 ;\ a_n \neq 0$$

De grado $n \geq 1$; admite al menos una raíz compleja.

Nota:
Si "n" es impar siempre admite al menos una raíz real.

B. Teorema del factor

Todo polinomio P(x) de grado n ($n \geq 1$); $a_n \neq 0$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 ; a_n \neq 0)$$

Puede ser descompuesto en "n" factores de grado 1, esto es:

$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$, donde r_1, r_2, r_3, ...r_n son raíces de P(x).

Nada impide que haya factores iguales, lo cual originaría que haya raíces iguales. Por lo tanto:

N.° soluciones ≤ N.° raíces

Nota:

- Si todas las raíces de la ecuación son diferentes entonces el número de soluciones es igual al número de raíces.
- Si al menos dos raíces son iguales entonces el número de soluciones es menor que el número de raíces.

C. Multiplicidad de raíces

Considerando la ecuación polinomial:

$$(x-1)^3(x-4)^2(x-3) = 0$$

se observa que hay una raíz 3, dos raíces 4 y tres raíces 1. Entonces diremos que 3 es una raíz simple, 4 es una raíz doble y 1 es una raíz triple.

Definición

Diremos que **r** es una raíz de multiplicidad m, $m \geq 1$, de la ecuación polinomial P(x) = 0. Solamente si, $P(x) = (x - r)^m Q(x)$, donde $Q(r) \neq 0$.

D. Teorema de Cardano

Viene a ser la recopilación de las relaciones que hay entre las raíces de la ecuación P(x) = 0 y sus respectivos coeficientes.

Caso 1

Consideremos una ecuación de 2.° grado:

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$$

cuyas raíces son r_1 y r_2.

Del teorema del factor tenemos:

$a(x - r_1)(x - r_2) = 0$; r_1 y r_2 son raíces como ambas ecuaciones son equivalentes:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Dividiendo todo entre **a:**

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - r_1)(x - r_2)$$

Operando el segundo miembro:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2$$

Entonces de la igualdad tenemos:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a};\ r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Caso 2

Consideremos una ecuación de 3.er grado

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;\ a \neq 0$$

donde r_1, r_2, r_3 son raíces.

Aplicando el teorema del factor:

$$a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

Igualando:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Dividiendo ambos miembros entre **a**:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Operando el segundo miembro:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Entonces de la igualdad tenemos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a};\quad r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \frac{c}{a};$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a}$$

Caso general

Dada la ecuación:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0;$$

$a_n \neq 0$, cuyas raíces son r_1, r_2, r_3, ... r_n; tenemos:

1. Suma de raíces

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2. Suma de productos binarios

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-1} \cdot r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

3. Suma de productos ternarios

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

4. Producto de raíces

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

E. Teorema de paridad de raíces

Teorema 1

Sea la ecuación polinomial:

$$P_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0;$$

$a_n \neq 0$, si $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$; se cumple que si la ecuación tiene una raíz de la forma $a + \sqrt{b}$ $(\sqrt{b} \notin \mathbb{N})$; entonces la otra raíz es $a - \sqrt{b}$ llamada conjugada.

Teorema 2

Sea la ecuación polinomial

$$P_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0;$$

$a_n \neq 0$, si $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$; se cumple que la ecuación admite como raíz a $\mathbb{Z} = \alpha + \beta i$, entonces también admite como raíz al número $\overline{\mathbb{Z}} = \alpha - \beta i$; llamado el conjugado de $\mathbb{Z}$.

Nota:

Si la ecuación polinomial tiene coeficientes racionales entonces se admite una raíz de la forma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; entonces las otras raíces son de la forma $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; $-\sqrt{a} + \sqrt{b}$; $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$

F. Teorema de René Descartes

Llamaremos a este teorema Regla de signos de Descartes. En este teorema se hace mención a la cantidad de raíces reales (positivas o negativas) que puede tener una ecuación polinomial de grado "n".

$$P_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0;\ a \neq 0$$

Tendremos:

1. El número de raíces reales positivas de una ecuación polinomial P(x) = 0, será igual al número de variaciones de signos que presenten los coeficientes de P(x), es menor que esta cantidad en un número par.

   Ejemplo:

   $x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = 0$; esta ecuación tiene dos raíces reales positivas debido a que hay dos cambios de signo del 1.er al 2.do término y del 2.º al 3.º término.

   $x^5 + 4x^2 + 5x - 6 = 0$; esta ecuación tiene una raíz real positiva.

2. El número real de raíces reales negativas de la ecuación P(x) = 0, será igual al número de variaciones de signos que presenten los coeficientes de P(−x), o, es menor que esta cantidad en un número par.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Sea el polinomio:

$$P(x) = 8x^3 + ax^2 + bx + c$$

Que tiene como raíces a: $-3, -1/4, 1/2$.

Entonces $P(x + 1)$ es:

A) $8x^3 + 41x^2 - 3x - 3$
B) $8x^3 + 22x^2 - 17x - 3$
C) $8x^3 + 46x^2 + 61x + 20$
D) $8x^3 + 37x^2 + 6x - 12$
E) $8x^3 + 35x^2 - 7x - 3$

UNMSM 2005-II
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Aplicando el teorema de Cardano:

$$\frac{-a}{8} = -3 - 1/4 + 1/2 \Rightarrow a = 22$$

$$\frac{b}{8} = (-3)(-1/4) + (-3)(1/2) + (1/2)(-1/4) \Rightarrow b = -7$$

$$\frac{-c}{8} = (-3)(-1/4)(1/2) \Rightarrow c = -3$$

Entonces:

$$P(x) = 8x^3 + 22x^2 - 7x - 3$$

$x = x+1 \Rightarrow P(x+1) = 8(x+1)^3 + 22(x+1)^2 - 7(x+1) - 3$

$P(x+1) = 8x^3 + 46x^2 + 61x + 20$

Respuesta: $8x^3 + 46x^2 + 61x + 20$

Problema 2

Halla la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

A) $-1/2$ B) 0
C) $17/2$ D) -9
E) 8

UNMSM 2004-I
NIVEL FÁCIL

Resolución:

Factorizando:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

$$(4x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0 \; ; \; x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 1/2 \; ; \; x = \pm 2$$

Entonces:

$$(1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-2)^2 + (2)^2 = 17/2$$

Respuesta: $17/2$

Problema 3

Se sabe que las raíces de la ecuación:

$x^3 - 12x^2 + rx - 28 = 0$

Están en progresión aritmética. Halla el valor de "r".

A) 20 B) 24 C) 39
D) 16 E) -20

UNMSM 2006-I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Sabemos que las raíces son:

$$a - n \; ; \; a \; ; \; a + n$$

Aplicando el teorema de Cardano:

$a - n + a + a + n = 12/1 \Rightarrow a = 4$

$(4 - n)(4)(4 + n) = 28/1 \Rightarrow n = 3$

Entonces las raíces son: 1; 4; 7

Luego: $1.4 + 1.7 + 4.7 = r/1 \Rightarrow r = 39$

Respuesta: 39

NÚMEROS REALES. AXIOMAS, TEOREMAS. DESIGUALDADES

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN

Los números reales (designados por $\mathbb{R}$) incluyen tanto a los números racionales (positivos, negativos y el cero) como a los números irracionales.

A. Números naturales ($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4...\}$

B. Números enteros ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2...\}$

C. Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Son aquellos números que se pueden expresar como una fracción de términos enteros.
Ejemplos:

- $6 = \frac{18}{3} \rightarrow 6 \in \mathbb{Q}$
- $0,2 = \frac{1}{5} \rightarrow 0,2 \in \mathbb{Q}$

D. Números irracionales ($\mathbb{I}$)

Son aquellos números que no se pueden expresar como una fracción de términos enteros.
Ejemplo:

- $\sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{7}$
- $\pi = 3,141592...$

II. AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

A. Axiomas de la adición

1. Si a y b $\in \mathbb{R} \rightarrow (a+b) \in \mathbb{R}$
   Clausura
2. Si $a+b = b+a$; a, b $\in \mathbb{R}$
   Conmutatividad
3. Si $(a+b)+c = a+(b+c)$; a, b, c $\in \mathbb{R}$
   Asociatividad
4. Si $!0/a+0 = 0+a = a$; a $\in \mathbb{R}$
   Elemento neutro aditivo
5. Si a $\in \mathbb{R}!$ (−a) $\in \mathbb{R}$ /a+(−a) = a+(−a)
   Elemento inverso aditivo

B. Axiomas de la multiplicación

1. Si a $\in \mathbb{R}$ y b $\in \mathbb{R} \rightarrow$ (a.b) $\in \mathbb{R}$
   Clausura
2. Si a.b = b.a; a.b $\in \mathbb{R}$
   Conmutatividad
3. Si (a.b).c = a.(b.c); a.b.c $\in \mathbb{R}$
   Asociatividad
4. Si $!1/a.1 = 1.a = a$; a $\in \mathbb{R}$
   Elemento neutro multiplicativo
5. Si a $\in \mathbb{R} - \{0\}!(1/a) \in \mathbb{R}$ /a.(1/a) = (1/a).a = 1
   Elemento inverso multiplicativo

III. RELACIÓN DE ORDEN

Dado un conjunto A distinto del vacío donde se define $\mathbb{R}$ en A.
$\mathbb{R}$ es una relación de orden en A si verifica las siguientes propiedades:

- (a; a) $\in \mathbb{R}$; $\forall$ a $\in$ A (Propiedad reflexiva)
- Si (a; b) $\in \mathbb{R}$; $\wedge$ (b; a) $\in \mathbb{R} \Rightarrow a = b$
  (Propiedad antisimétrica)
- (a; b) $\in \mathbb{R}$; $\wedge$ (b; c) $\in \mathbb{R} \Rightarrow$ (a; c) $\in \mathbb{R}$
  (Propiedad transitiva)

Entonces podremos decir que el conjunto A es ordenado usaremos los siguientes símbolos:

Estrictos { > "mayor que"; < "menor que" }

No estrictos { ≥ "mayor o igual que"; ≤ "menor o igual que" }

A. Clases de desigualdad

1. Desigualdad absoluta

Aquella que se verifica para todos los valores reales

que se asignen a las letras que intervienen en ella.
Ejemplos:

- $x^2+10 > 0$ (Se verifica $\forall\, x \in \mathbb{R}$)
- $(a-b)^2 > -1$ (Se verifica $\forall\, a; b \in \mathbb{R}$)

2. Desigualdad condicional

Aquella que se verifica para determinados valores de sus letras (inecuaciones).

Ejemplos:

- $x-5 > 3$ (Se verifica solo para $x>8$)
- $(x-1)^2 \leq 0$ (Se verifica solo para $x=1$)

B. Definiciones relativas a desigualdad

1. "a" es positivo $\leftrightarrow a > 0$
2. "a" es negativo $\leftrightarrow a < 0$
3. $a > b \leftrightarrow a - b > 0$
4. $a < b \leftrightarrow a - b < 0$
5. $a \geq b \leftrightarrow a > b$ ó $a=b$
6. $a \leq b \leftrightarrow a < b$ ó $a=b$

C. Teoremas relativos a desigualdades

Siendo $a; b; c; d \in \mathbb{R}$

1. Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a>c$ (Propiedad transitiva)
2. Si $a > b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a \pm c > b \pm c$
3. Si $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc$
4. Si $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$
5. Si $\begin{array}{l} a>b \\ c>d \end{array} \Rightarrow a+c>b+d$
6. Si $\begin{array}{l} a>b \\ c<d \end{array} \Rightarrow a-c>b-d$
7. Si a; b; c tienen el mismo signo
   $a<b<c \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$
8. Siendo a; b; c del mismo signo
   $a<b<c \wedge$ "n" impar $\Rightarrow a^n < b^n < c^n$
9. Siendo $a<b<c \wedge$ "n" par
   - Si: a; b; c positivos $\Rightarrow a^n < b^n < c^n$
   - Si: a; b; c negativos $\Rightarrow a^n > b^n > c^n$
   - Si: a y c de signos contrarios $\Rightarrow 0 < b^n <$ mayor potencia hallada

IV. INTERVALOS

Los intervalos son subconjuntos de números reales que gráficamente son segmentos de recta o semirecta y cuyos elementos satisfacen ciertas desigualdades. Son de varias clases:

A. Intervalo cerrado

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ en el cual se incluye los extremos "a" y "b".

B. Intervalo abierto

$\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ en el cual no se incluye los extremos "a" y "b".

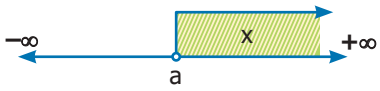
C. Intervalo semiabierto o semicerrado

$[a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

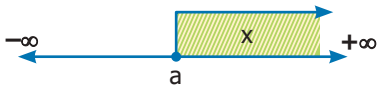
$\langle a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

D. Intervalo infinito o no acotado

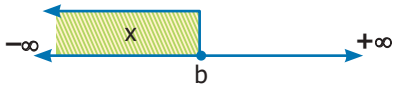
$\langle a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$



$[a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$



$\langle -\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$



Observaciones:

- $\mathbb{R} = \langle -\infty; \infty\rangle$
- $\mathbb{R}^+ = \langle 0; \infty\rangle$
- $\mathbb{R}^- = \langle -\infty; 0\rangle$

V. OPERACIONES CON INTERVALOS

A. Unión y disyunción "∪"

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \vee x \in B\}$

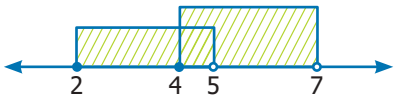
Ejemplo:

Sean:

$A = [2; 5\rangle$ hallar "$A \cup B$"

$B = [4; 7\rangle$

Graficando:



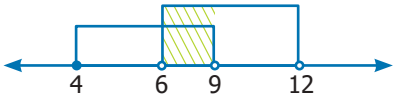
Luego: $A \cup B = [2; 7\rangle$

$A \cup B = \{x/2 \leq x < 7\}$

B. Intersección y conjunción "∩"

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \in B\}$

Ejemplo:
Sean:
$A = [4; 9\rangle$ hallar "$A \cap B$"
$B = \langle 6; 12\rangle$
Graficando:



Luego: Sean $A \cap B = \langle 6; 9\rangle$
$A \cap B = \{x/6 < x < 9\}$

C. Diferencia

$$A - B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo:
Sean:
$A = [3; 10\rangle$ hallar "$A - B$"
$B = \langle 5; 8\rangle$
Graficando:

Luego: $A - B = [3; 5] \cup [8; 10\rangle$
$A - B = \{x/3 \leq x \leq 5 \vee 8 \leq x < 10\}$

D. Complemento A^c; A'

$$A' = \{x \in \mathbb{R} / x \notin A\}$$

Ejemplo:
Sean:
$A = [2; 7\rangle$ hallar "A"
Graficando:

$A' = \langle -\infty; 2\rangle \cup [7; +\infty\rangle$
$A' = \{x/x < 2 \vee x \geq 7\}$

VI. RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$$

Donde:
n = índice ($n \in \mathbb{R}$)
a = radicando ($a \in \mathbb{R}$)
b = raíz ($b \in \mathbb{R}$)

Además se debe cumplir que:

$\text{Par}\sqrt{+} = +$	$\text{Par}\sqrt{-}$ = No existe
$\text{Impar}\sqrt{+} = +$	$\text{Impar}\sqrt{-} = -$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ porque $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$
- $\sqrt[3]{-0,027} = -0,3$ porque $(-0,3)^3 = -0,027$

A. Exponente fraccionario

Sea $\frac{m}{n} \in Q \wedge \sqrt[n]{a^m}$ existe, entonces:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m$$

Ejemplos:

- $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8}^2 = 2^2 = 4$
- $\left(\frac{-1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$

Nota:
Recordar los tipos de exponentes estudiados:

- $a^n = a.a.a...a;\ n \in \mathbb{N}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
- $a^0 = 1$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1
Halle el conjunto de los números reales x, tal que la suma del número x y su inverso multiplicado sea mayor que 2.
A) $\{x \in \mathbb{R} / x > 0 \wedge x \neq 1\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$
D) $\{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$
E) $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

UNMSM 2011 - II
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:
$(x-1)^2 > 0;\ x \neq 1$

$x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 2x$
Si $x > 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} > 2$
$x + \frac{1}{x} > 2$
$\therefore \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \wedge x \neq 1\}$

Respuesta: $\{x \in \mathbb{R} / x > 0 \wedge x \neq 1\}$

Problema 2

Si $b > 0$; $a^2 \le b$ y $1 \le \dfrac{a+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$,

determine $\sqrt{b}+a$

A) $2\sqrt{ab}$
B) 3a
C) 2b
D) 2a
E) 2

UNMSM 2011 - II
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

- De $a^2 \le b \Rightarrow -\sqrt{b} \le a \le \sqrt{b}$...(I)

- De $1 \le \dfrac{a+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}} \Rightarrow 2\sqrt{b} \le a+\sqrt{b}$

$\sqrt{b} \le a$...(II)

De (I) y (II) $a \le \sqrt{b} \wedge a \ge \sqrt{b}$

$\therefore a = \sqrt{b}$

$\Rightarrow \sqrt{b}+a = a+a = 2a$

Respuesta: 2a

Problema 3

Si a y b son dos números reales positivos y $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$ determine el valor de a^2-b^2.

A) 1 B) 0 C) 3
D) 5 E) 7

UNMSM 2005 - II
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:

Del dato: $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{ab}$

Pero: $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

Esto solamente se cumple si: $a=b$
Luego: $a^2-b^2=0$

Respuesta: 0

INECUACIONES I

DESARROLLO DEL TEMA

I. INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Es aquella que al ser reducida adopta cualquiera de las siguientes formas:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n > 0$$
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n \geq 0$$
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n < 0$$
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n \leq 0$$

Donde: x = incógnita $\wedge$ $n \in \mathbb{N}/\ n \geq 3$, además:
$\{a_0; a_1; a_2; ....; a_n\} \subset \mathbb{R}/\ a_0 \neq 0$

II. MÉTODO DE LOS PUNTOS DE CORTE

Es un recurso que se emplea para encontrar en forma práctica y sencilla el intervalo solución de una inecuación ya sea de 2.^{do} grado o de grado superior. Para aplicar este método será necesario adecuar a la inecuación a una de las formas mencionadas en los ítems anteriores teniendo en cuenta que el primer coeficiente del primer miembro deberá ser positivo y que en el segundo miembro deberá figurar el cero.

A continuación se indican los pasos que se deben seguir para resolver una inecuación por este método.

- **1.^{er} paso:** Se lleva todo término de la inecuación al 1.^{er} miembro.
- **2.^{do} paso:** Se factoriza totalmente la expresión obtenida en el 1.^{er} miembro.
- **3.^{er} paso:** Se calculan los puntos de corte, los cuales son los valores que asume la incógnita al igualar a cero cada factor obtenido en el paso anterior.
- **4.^{to} paso:** Se llevan los puntos de corte en forma ordenada a la recta numérica.
- **5.^{to} paso:** Cada zona determinada por dos puntos de corte consecutivos, se señalan alternadamente de derecha a izquierda con signos (+) $\wedge$ (−). Se iniciará con el signo (+).
- **6.^{to} paso:** Si la inecuación admite como signo de relación a: >, o, ≥; el intervalo solución estará representado por las zonas (+). Si la inecuación admite como signo de relación a: <, o, ≤; el intervalo solución estará representado por las zonas (.)

III. INECUACIONES FRACCIONARIAS

Una inecuación en una incógnita es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \text{ ó } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0; Q(x) \neq 0$$

donde P(x) y Q(x) son monomios o polinomios diferente de cero.

Para resolver una inecuación fraccionaria debe tenerse en cuenta que las inecuaciones:

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ó $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$; son equivalentes a las inecuaciones

P(x), Q(x) > 0 ó P(x).Q(x) < 0 es decir:

si $Q(x) \neq Q^2(x) > 0$, de donde se tiene:

$$\text{Si } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Rightarrow \frac{P(x)\cdot Q^2(x)}{Q(x)} > 0\cdot Q^2(x) \Rightarrow P(x)\cdot Q(x) > 0$$

$$\text{Si } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Rightarrow \frac{P(x)\cdot Q^2(x)}{Q(x)} < 0\cdot Q^2(x) \Rightarrow P(x)\cdot Q(x) < 0$$

IV. INECUACIONES CON RADICALES

Vienen a ser desigualdades relativas en las que se presentan radicales y dentro de ellos las variables. Entre ellas se pueden reconocer a las siguiente formas:

1. $\sqrt[2n]{x} < y$

   Para su resolución se deberá plantear las siguientes relaciones:

   $$x \geq 0 \wedge y > 0 \wedge x < y^{2n}$$

2. $\sqrt[2n]{x} > y$

   Para la resolución de este tipo de inecuaciones se deberán considerar los siguientes casos:

   Caso (A): $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x > y^{2n}$
   Caso (B): $x \geq 0 \wedge y < 0$

La solución final de este tipo de inecuaciones viene dado por la unión de las soluciones obtenidas en los casos (A) y (B).

3. $\sqrt[2n+1]{x} < y; \sqrt[2n+1]{x} > y$

Para resolución de este tipo de inecuaciones con radicales que admitan por índice a algún número impar, cualquiera que sea el signo de relación que se presente, debemos decir que no existe ninguna restricción para su resolución, bastando elevar a ambos miembros de la inecuación a un exponente que elimine el signo radical y a continuación proceder tal como se hizo con los diferentes casos de inecuaciones estudiados hasta aquí.

V. PROPIEDADES AUXILIARES

A. $|x| \geq x; \forall x \in \mathbb{R}$

B. $|x+y| \leq |x|+|y|; \forall (x+y) \subset \mathbb{R}$

C. $\sqrt[2m]{x} + \sqrt[2n]{y} \geq 0; \forall x \geq 0 \wedge y \geq 0$

VI. INECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas desigualdades relativas, en las que las incógnitas se presentan de modo que forman parte de algún exponente. Los siguientes son los casos más comunes:

$$a^x < a^y;\ a^x > a^y;\ a^x \leq a^y;\ a^x \geq a^y$$

- **Propiedades**

1. Siendo $a > 1$, tenemos:
   - Si: $a^x < a^y \Rightarrow x < y$
   - Si: $a^x > a^y \Rightarrow x > y$

   Puede observarse que los exponentes presentan el mismo signo de relación que el de las potencias.

2. Siendo $0 < a < 1$, tenemos:
   - Si: $a^x < a^y \Rightarrow x > y$
   - Si: $a^x > a^y \Rightarrow x < y$

   Observar que el signo de relación de la potencia se invierte para los exponentes.

Observación:
En aquellas inecuaciones donde intervengan signos de relación doble, se procederá de igual modo que en los casos anteriores. Por ejemplo en el caso (1).

Si: $a > 1 / a^x \geq a^y \Rightarrow x \geq y$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$(|x|+1)^{2x^2-5x+2} > (|x|+1)^{14}$$

A) $\langle -3/2; 4\rangle$
B) $\langle 4; +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -3/2\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; -3/2\rangle$
E) $\langle -\infty; -3/2\rangle \cup \langle 3/2; +\infty\rangle$

UNMSM 2010 – I

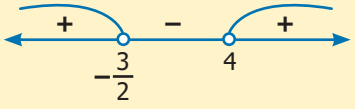
Resolución:

Tenemos:

$2x^2 - 5x + 2 > 14$
$2x^2 - 5x - 2 > 0$

$2x \times 3$
$x \times -4$

$(2x+3)(x-4) > 0$



$x \in \langle -\infty; -3/2\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$

Respuesta: $\langle -\infty; -3/2\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$

Problema 2

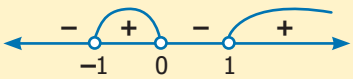
Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|x| + x^3 > 0$

A) $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$
B) $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$
C) $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$
D) $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$
E) $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

UNMSM 2012 – I

Resolución:

$x < 0 \wedge -x + x^3 > 0$
$x(x^2 - 1) > 0$
$x(x+1)(x-1) > 0$



$x \geq 0 \ \wedge \ x + x^3 > 0$
$x(x^2 + 1) > 0$
$x > 0$

$\therefore$ C.S. $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

Respuesta: $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

Problema 3

Hallar el menor valor de x que satisfaga las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} a \leq x \leq a + 20 \\ |x-a|^2 - 7|a-x| - 60 \geq 0 \end{cases}$$

A) $a + 11$ B) $a + 10$
C) $a + 12$ D) $a + 9$
E) $a + 8$

UNMSM 2006-II

Resolución:

$|x-a|^2 - 7|x-a| - 60 \geq 0$

$|x-a| \times -12$
$|x-a| \times 5$

$(|x-a|-12)\underbrace{(|x-a|+5)}_{(+)} \geq 0$

$|x-a| \geq 12 \begin{cases} x-a \leq -12 \vee x-a \geq 12 \\ x \leq a-12 \vee x \geq a+12 \end{cases}$

C.S.: $x \in [a+12; a+20]$
Menor valor: $a+12$

Respuesta: $a+12$

INECUACIONES II

DESARROLLO DEL TEMA

I. RESOLUCIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES

Dado un sistema de inecuaciones lineales conformado por dos o más inecuaciones, la solución gráfica de dicho sistema es la región que se determina al intersectar todos los semiplanos originados por las inecuaciones que conforma el sistema.

Ejemplo:

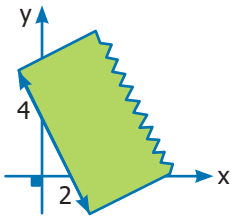
Resolver:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 4 & \dots (1) \\ 3x - y \geq 6 & \dots (2) \end{cases}$$

Resolución:

Inicialmente graficamos los semiplanos que correspondan a cada inecuación del sistema:

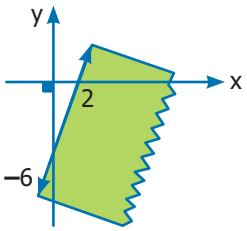
(1) $2x + y \geq 4 \leftrightarrow y \geq 4 - 2x$; semiplano ubicado por encima de la recta $y = 4 - 2x$, incluyendo a esta.



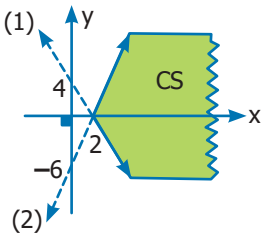
(2) $3x - y \geq 6 \leftrightarrow -3x + y \leq 6$

$y \leq 3x - 6$

semiplano ubicado por debajo de la recta $y = 3x - 6$, incluyendo a esta.



Finalmente el conjunto solución del sistema viene dado por la intersección de los semiplanos hallados, veamos:



PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

La suma de las coordenadas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 3 \\ g(x) = \frac{x}{2} + 2 \end{cases}$$

es:

A) 31/4
B) 31/3
C) 41/4
D) 41/3
E) 33/4

UNMSM 2011–II

Resolución:

Hacemos $f(x) = g(x)$

$$x^2 - 2x + 3 = \frac{x}{2} + 2$$
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$(2x - 1)(x - 2) = 0$$
$$x = \frac{1}{2};\ y = \frac{9}{4}$$
$$x = 2;\ y = 3$$
$$\Sigma: \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + 5 = \frac{31}{4}$$

Respuesta: 31/4

Problema 2

Calcule la suma de todos los números enteros positivos que satisfacen simultáneamente las inecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{n}{5} + 14 \le \frac{3n+24}{2} \\ \frac{n+1}{4} - 29 \le -10 \end{cases}$$

A) 2849 B) 2848
C) 2850 D) 2949
E) 2948

UNMSM 2008–II

Resolución:

$$\begin{cases} n \ge \frac{20}{13} \\ n \le 75 \end{cases}$$

$$\frac{20}{13} \le n \le 75$$

$n \in \{2, 3, 4, 5, ..., 75\}$

$2 + 3 + 4 + 5 + ... + 75 = 2849$

Respuesta: 2849

Problema 3

Halle el área de la región limitada por el sistema.

$$\begin{cases} f(x) = |2x| \\ g(x) = \frac{x}{2} + 5 \end{cases}$$

A) $20/3\ u^2$ B) $32/3\ u^2$
C) $30/3\ u^2$ D) $40/3\ u^2$
E) $16/3\ u^2$

UNMSM 2009–I

Resolución:

Hacemos $|2x| = \frac{x}{2} + 5$

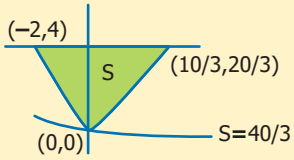
$$\frac{x}{3} + 5 \ge 0 \wedge [2x = \frac{x}{3} + 5 \vee 2x = -\frac{x}{3} - 5]$$

$$4x = x + 10 \vee 4x = -x - 10$$

$$x \ge -15 \wedge [x = \frac{10}{3} \vee x = -2]$$

$x = 10/3;\ y = 20/3$

$x = -2;\ y = 4$



Respuesta: 40/3 u²

VALOR ABSOLUTO

DESARROLLO DEL TEMA

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real "x", se define como aquel número real no negativo que se denotas por |x| donde:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $|6| = 6$, solo se borran las barras, pues 6 es positivo
- $|-8| = -(-8) = 8$; al borrar las barras se cambia de signo de -8 a 8, pues -8 es negativo
- $|3| = 3$ puesto que $3 > 0$
- $|-4| = -(-4) = 4$ puesto que $-4 < 0$
- $|x^2+x+1| = x^2+x+1$ porque $x^2+x+1 > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

I. PROPIEDADES

1. El valor absoluto de un número real nunca es negativo, es decir:

$$|x| \geq 0; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

2. Si dos número reales se diferencian sólo en el signo sus valores absolutos son iguales, es decir:

$$|-x| = |x|; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

3. El cuadrado del valor absoluto de un número real es igual al cuadrado de dicho número real.

$$|x|^2 = x^2; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

4. $$|x.y| = |x||y|; \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

5. $$\left|\frac{x}{y}\right| \square \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$$

6. $$\sqrt{x^2} = |x|; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

II. DESIGUALDAD TRIANGULAR

El valor absoluto de la suma de dos número reales "x" e "y" es menor o igual que la suma de los valores absolutos de "x" e "y".

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leftrightarrow x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x + y| = |x| + |y| \leftrightarrow xy \geq 0$$

$$|x + y| < |x| + |y| \leftrightarrow xy < 0$$

III. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Vienen a ser igualdades condicionales, los cuales frecuentemente se presentan en las siguientes formas:

$$|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$|x| = y \leftrightarrow [y \geq 0 \wedge (x = y \vee x = -y)$$

$$|x| = |y| \leftrightarrow (x = y \wedge x = -y)$$

IV. INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Vienen a ser desigualdades relativas, las cuales frecuentemente se presentan en las siguientes formas:

$$|x| < y \leftrightarrow [y > 0 \wedge (-y < x < y)$$

$$|x| > y \leftrightarrow (x < -y \vee x > y)$$

$$|x| < |y| \leftrightarrow |x|^2 < |y|^2 \leftrightarrow x^2 < y^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si: a, b y c son las soluciones no negativas de la ecuación $||x-3|-5| = 0$ entonces el valor de $a + b + c$ es:

A) 16 B) 12 C) 6
D) 2 E) 10

Resolución:

$|x-3|-5 = 2 \vee |x-3|-5 = -2$

$|x-3| = 7 \vee |x-3| = 3$

$x = \{10, -4\} \vee x = \{6,0\}$

Soluciones no negativas

{10, 6, 0}

$\therefore \sum 16$

Respuesta: 16

Problema 2

Resolver: $|2x + 6| = |x + 8|$

Resolución:

Aplicando el teorema:

$|a|=|b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

$2x + 6 = x + 8 \vee 2x + 6 = -x-8$

$x = 2$ $\qquad 3x = -14$

$x = -\frac{14}{3}$

Respuesta: C.S.= {−14/3; 2}

Problema 3

Halle la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación:

$2|x-3|^2 - 7|x-3| + 3 = 0$

A) 105/2 B) 97/2 C) 109/2
D) 117/2 E) 113/2

UNMSM 2006-II

Resolución:

Haciendo $|x-3| = \alpha$

Entonces:

$2\alpha - 7\alpha + 3 = 0$

$2\alpha \times -1$

$\alpha \times -3$

$\alpha = 1/2; \alpha = 3$

$|x-3| = 1/2 \qquad |x-3| = 3$

$x = \{7/2,5/2\}; x = \{6,0\}$

$\sum$ cuadrados: 109/2

Respuesta: 109/2

FUNCIONES: DOMINIO - RANGO - GRÁFICOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. PAR ORDENADO

Es un conjunto que consta de dos elementos en el que interesa el orden, es decir, a uno se le distingue como el primero y al otro, el segundo del par ordenado. A los elementos de un par ordenado se les llama coordenadas.

$(x; y)$
- y: 2.ª coordenada
- x: 1.ª coordenada

Teorema

$$R = \{(a;b)/\ a \in A,\ b \in B \wedge aRb\}$$

II. PRODUCTO CARTESIANO

Dados los conjuntos no vacíos "A" y "B", el producto cartesiano de "A" y "B" denotado como "A x B", es el conjunto de todos los pares ordenados (a;b) donde "a" es un elemento de "A" y "b" un elemento de "B".

Asi:
$A \times B = \{(a;b)/a \in A \ \wedge \ b \in B\}$

Ejemplos:

Sean: $A = \{3; 2; 5\}$ y $B = \{5; 2\}$.

$A \times B = \{(3;5), (3;2), (2;5), (2;2), (5;5), (5;2)\}$

$B \times A = \{(5;3), (5;2), (5;5), (2;3), (2;2), (2;5)\}$

Relación binaria

Sea "A" y "B" dos conjuntos no vacíos, se define la relación binaria de "A" en "B" de la siguiente manera.

$$R = \{(a;b)/\ a \in A,\ b \in B \wedge aRb\}$$

Entiéndase que aRb implica que entre a y b existe alguna relación o aun cuando en muchos casos no se pueda traducir en una fórmula o regla de correspondencia.

Ejemplos:

Dado $A = \{1; 2; 3; 4\}$ y $B = \{5; 6\}$.

Halla R : A . B

$R = \{(a;b)/\ a \in A,\ b \in B \text{ y } a + b < 9\}$

$R = \{(1;5), (1;6), (2;5), (2;6), (3;5)\}$

III. FUNCIÓN

Es la relación binaria en la que pares distintos no tienen el mismo primer elemento.

Ejemplos:

1. $f = \{(1;3), (2;4), (3;5)\}$

Es una función, pues no existen dos pares ordenados distintos que tienen el mismo primer elemento.

2. $A = \{(2;7), (3;8), (2;11)\}$

No es función, pues los pares (2;7) y (2;11) tienen el mismo primer elemento.

Sea la función: f: AB.

Donde: A → Conjunto de partida
B → Conjunto de llegada

Nota:

Las funciones se denotan igualmente por letras tales como f, g, h, F, G, H. Si "f" es una función, entonces f(x). (Léase "f en x" o simplemente "f(x)") indica el segundo elemento del par cuyo primer elemento es "x" así podemos escribir.

$$f = \{(x;\ f(x))/\ x \in D_f\}$$

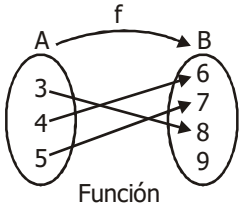
Sea la función:

f: A → B

A conjunto de partida

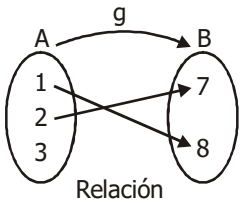
B conjunto de llegada

1.



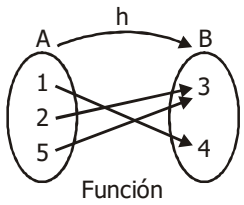
Función

2.

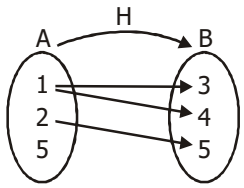


Relación

Nota:
Una relación f: A→B será una función si cumple:
1. Para cada x∈A ∧ y∈B/(x;y) f
2. Si (x; y) ∈ f (x; z) ∈ f ⇒ y = z

3.


Función

4.


No es función

A. Dominio y rango de una función

Sea f: A→B una función de A en B, llamaremos dominio de la función f, al conjunto de todas sus primeras componentes, al cual denotaremos por:
Df = Domf, es decir:

$$Df = \{x \in A / \exists! y \in B \wedge (x;y) \in f\} \subset A$$

Y llamaremos rango de la función al conjunto de las imágenes de todos los elementos de A, mediante f al cual denotaremos por:
Rf = Ranf, es decir:

Ejemplo:
Sea f = {(1;2), (3;4), (5;6), (7;8)}
Luego Dom f = {1; 3; 5; 7} ∧ Ran f = {2; 4; 6; 8}

B. Sugerencia para el cálculo del dominio y rango de una función

- El dominio de una función f se determina analizando todos los valores posibles que pueda tomar "x".
  De manera que f(x) sea real, salvo el caso en que dicho dominio sea especificado.
- El rango de una función f se determina despejando la variable "x" en función de "y", luego se analiza todos los valores posibles que pueda tomar "y", de tal manera "x" sea real.

Nota:
No debe existir 2 o más pares ordenados diferentes con el mismo primer elemento. En caso existiera, de acuerdo a la definición, los segundos componentes tendrán que ser iguales; si no es así, entonces no será función.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$
Si: $f(0) = -2$; $f(1) = 6$ y
$f(3) + f(2) = 76$.
Determina el valor de: $3a + 2b + c$.
A) 19 B) 23 C) 17
D) 13 E) 29

UNMSM 2007 - II

Resolución:
Para:
$x = 0$ $a.0^2 + b.0 + c = -2$ $c = -2$
$x = 1$ $a.1^2 + b.1 + c = 6$ $a + b = 8$ - - - (1)
$x = 3$ $a.3^2 + b.3 + c = 9a + 3b - 2$
$x = 2$ $a.2^2 + b.2 + c = 4a + 2b -$ } +
$13a + 5b - 4 = 76$ - - - (2)

De (1) y (2):
$a = 5$; $b = 3$ y $c = -2$

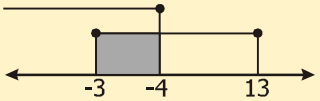
Entonces:
$3.5 + 2.3 - 2 = 19$

Respuesta: 19

Problema 2

Dado A = {x ∈ ℤ/ |x| ≤ 4}. Sean "f" y "g" funciones de A en IR definidas por $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \sqrt{1-x} + 1$. Hallar la intersección del rango de "f" con el dominio de "g".
A) {0; −2; −3} B) {−3; −2; −1}
C) {1; 2; 3} D) {−3; −2; 1}
E) {−1; 0; 1}

Resolución:
Si: $|x| \le 4 \Rightarrow -4 \le x \le 4$
*$F(x) = x^2 - 3$ **$g(x) = \sqrt{1-x} + 1$
$-4 \le x \le 4$ Dg: $1 - x \ge 0$
$0 \le x^2 \le 16$ $x \le 1$
$-3 \le \underbrace{x^2 - 3} \le 13$
$-3 \le f(x) \le 13$



Rf ∩ Dg = {−3;−2;1} * x ∈ ℤ

Respuesta: 2

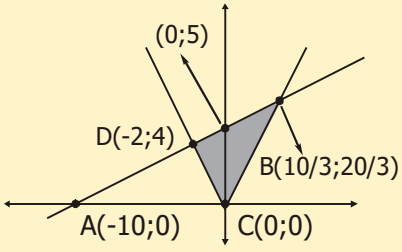
Problema 3

Halla el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:
$f(x) = |2x|$; $g(x) = x/2 + 5$
A) $(38/3)u^2$ B) $(20/3)u^2$
C) $(32/3)u^2$ D) $(40/3)u^2$
E) $(16/3)u^2$

UNMSM 2009 - I

Resolución:
Resolviendo: [f(x) = g(x)]
y: $2x = x/2 + 5$; x: 10/3 , y = 20/3
y: $-2x = x/2 + 5$; $x = -2$, $y = 4$
Del gráfico:
$A_S = A_{ABC} - A_{ADC}$

$$A_S = \frac{10.(20/3)}{2} - \frac{10.4}{2} \Rightarrow A_S = 40/3$$



Respuesta: *(40/3) u^2*

Pamer ACADEMIAS

FUNCIONES: INYECTIVA, SURYECTIVA, BIYECTIVA, INVERSA Y FUNCIÓN COMPUESTA

DESARROLLO DEL TEMA

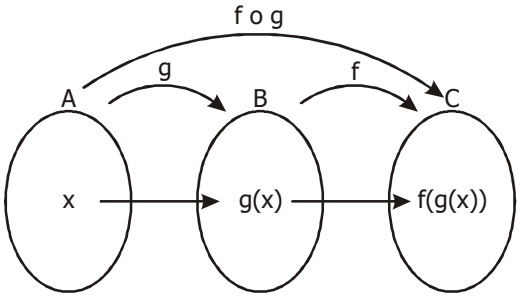
I. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones g: A → B y f: B → C; A, B, C conjuntos no vacíos la nueva función llamada composición de f y g denotada por (f o g), es aquella cuyo dominio es:

$x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(f)$

La regla de correspondencia de f o g, es:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$



A. Observación

Para que exista la nueva función f o g, necesariamente:

Rang ∩ Domf ≠ ∅

B. Conclusión

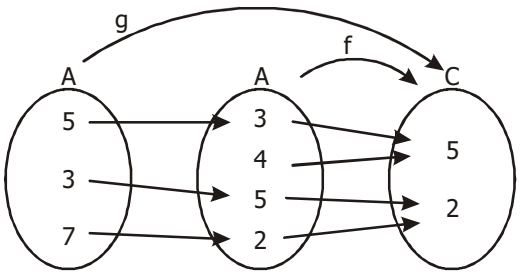
A) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

B) $Dom(f \circ g)(x) = x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(f)$

Ejemplo:

Dadas las funciones f y g:

f = {(3;5),(4;5),(5;2),(2;2)}; g = {(5;3),(3;5),(7;2)}



Entonces (f o g) = {(5,5),(3,2),(7,2)}

II. FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE

Se dice que una función es inyectiva si a cada elemento del rango le corresponde un único valor del dominio.

Formalmente: f es inyectiva si al elegir arbitrariamente dos elementos x_1, x_2 del dominio de f, se cumple:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Equivalentemente la función f: A → B es inyectiva, si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, para todo $x \in i$.

Ejemplo:

¿Es $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ inyectiva?, Dom(f) = i – {1}

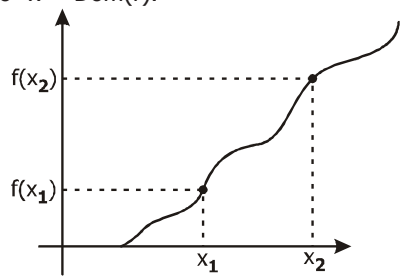
Solución:

Sean $x_1, x_2 \in Df$

Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow x_1 = x_2$

∴ f es inyectiva

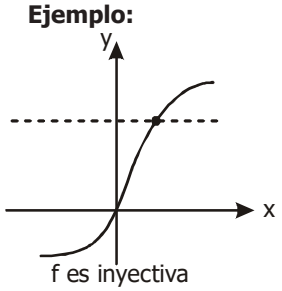
Interpretación gráfica: A cada elemento "y" corresponde un solo "x" ∈ Dom(f).



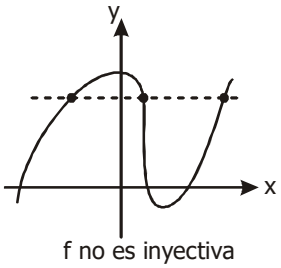
Teorema

Una función f es inyectiva si cualquier recta horizontal corta a su gráfico a lo más en un punto.

Ejemplo:



f es inyectiva



f no es inyectiva

III. FUNCIÓN SURYECTIVA (SOBREYECTIVA)

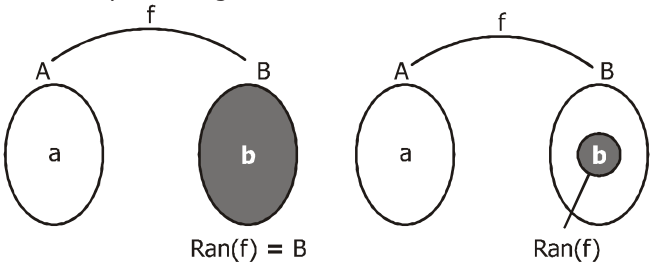
También conocida como función epiyectiva. Una función es suryectiva si el conjunto DE LLEGADA QUEDA CUBIERTO POR EL RANGO.

Es decir, el rango y el conjunto de llegada coinciden.

Sea f: A → B entonces:

"f" es sobreyectiva ⇔ ∀ b ∈ B ∃ a ∈ A / f(a) = b

Interpretación gráfica:



Función SOBREYECTIVA Función NO SOBREYECTIVA

Ejemplo:

La función f: i → i, tal que, f(x) = 3x + 4 es sobreyectiva.

Solución:

Tenemos y ∈ i (i: Conjunto de llegada) ⇒ y = 3x + 4

Despejamos x: $x = \frac{y-4}{3}$

Aplicamos f a cada extremo

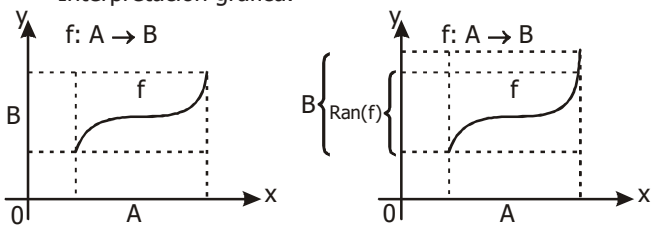
$f(x) = f\left(\frac{y-4}{3}\right) = 3\left(\frac{y-4}{3}\right) + 4 = y - 4 + 4 = y;\ \forall\ y \in i$

∴ por tanto f es sobreyectiva.

IV. FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función es biyectiva si es inyectiva y suryectiva a la vez.

Interpretación gráfica:



Función Biyectiva Función no Biyectiva
Ran(f) = B Ran(f) ≠ B

V. FUNCIÓN INVERSA

A. Dada la función A → B. Si es biyectiva, existe la inversa de f: x → y = f(x)
La inversa de f es f*: B → A
y → x = f*(y)

B. En caso de tenerse la Grf = {(x,f(x))/x ∈ A}; la inversa de la gráfica de f es: Grf* = {(f(x), x)/x ∈ A}

Ejemplo 1:

Dada la gráfica de f:

Grf = {(1;5)(2;6),(4;8),(5;9)}

Como f es biyectiva, entonces:

Grf = {(5;1)(6;2),(8;4),(9;5)}

Ejemplo 2:

Dada la función de f: A → B definido por $F(x) = \frac{x+1}{x-1}$

donde A = i − {1}, B = i − {1}

Se cumple que f es biyectiva, entonces la inversa de f.

La inversa de f es f*: B → A

y → x

Donde se debe despejar x en térmi ecuación:

$y = \frac{x+1}{x-1}$ yx − y = x + 1 =

yx − x = 1 + y

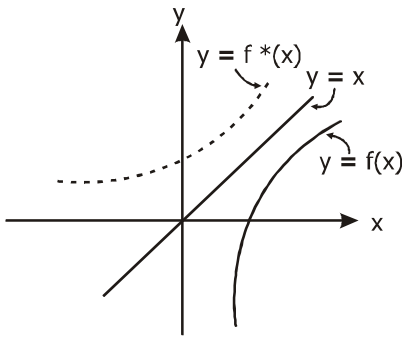
x(y − 1) = 1 + y

$x = \frac{1+y}{y-1}$

Luego, $f^*(y) = \frac{1+y}{y-1}$ o $f^*(x) = \frac{x+1}{x-1}$; x ∈ B

Gráfico de la función inversa

El gráfico de f* es simétrico a f respecto a la identidad de f(x) = x



Propiedades

PROPIEDAD 1

Si tenemos: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^*} A$

x → y → x

Se cumplen:

A) (f* o f)(x) = x, x ∈ A

B) (f o f*)(y) = y, y ∈ B

PROPIEDAD 2

(F*) = F

PROPIEDAD 3

(f o g)* = g* o f*, siempre que f, g y f o g tengan inversa.

PÁRIS para AMOR A SOFÍA

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Halla el área de la región limitada por el gráfico de la relación:

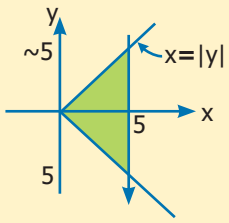
$R = \{(x;y) \in i^2 / x = |y| \wedge x = 5\}$

UNMSM 2011-II

A) $20\ \mu^2$ B) $30\ \mu^2$
C) $15\ \mu^2$ D) $12{,}5\ \mu^2$
E) $25\ \mu^2$

Resolución:

Graficamos las funciones:



Resolviendo

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = |y| \end{cases}$$

$\therefore y = 5 \quad y = -5$

$$A_{\triangle} = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow A_{\triangle} = \frac{10 \times 5}{2} = 25\ \mu^2$$

Respuesta: E) $25\ \mu^2$

Problema 2

Halla el área de la región determinada por el gráfico de la relación:

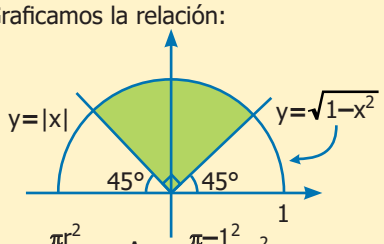
$R = \{(x;y) \in i^2 / |x| \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$

UNMSM 2011-II

A) $\frac{\pi}{2}\mu^2$ B) $\pi\mu^2$
C) $4\pi\mu^2$ D) $\frac{\pi}{4}\mu^2$
E) $2\pi\mu^2$

Resolución:

Graficamos la relación:



$$A_s = \frac{\pi r^2}{4} \Rightarrow A_s = \frac{\pi - 1^2}{4}\mu^2$$

Respuesta: D) $\pi/4\mu^2$

Problema 3

La suma de coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones f y g definidas en el conjunto de los números reales.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + 2;\ \text{es:}$$

UNMSM 2011-II

A) 31/3 B) 31/4
C) 41/4 D) 41/3
E) 33/4

Resolución:

Resolviendo: $f(x) = g(x)$

$\therefore 2x^2 - 4x + 6 = x + 4$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\rightarrow \quad x = 2 \wedge x = \frac{1}{2}$

$y = 3 \quad y = \frac{9}{4}$

Puntos: $(2;3) \wedge \left(\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$

Piden: $2 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{9}{4} = \frac{31}{4}$

Respuesta: B) 31/4

Pamer ACADEMIAS

LOGARITMOS- FUNCIONES LOGARITMOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. TEOREMA DE EXISTENCIA DEL LOGARITMO

Para todo par de números reales "a" y "b" tales que a>0; $a \neq 1$ y b > 0, existe un único número real x, que cumple $a^x = b$.

II. DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Sean los números reales "a" y "b", si a>0; $a \neq 1$ y b >0, el número real x se denomina logaritmo del número b en base a y se denota por $\text{Log}_a b$ si y solo si $a^x = b$.
De la definición se tiene:

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$

Donde:
a: base del logaritmo
b: número del logaritmo
c: logaritmo de b en la base a

Ejemplos:

1. $\text{Log}_2 64 = x \Leftrightarrow 64 = 2^x \Rightarrow 2^6 = 2^x \Leftrightarrow x = 6$
   Luego: $\text{Log}_2 64 = 6$
2. $\text{Log}_{\frac{1}{3}} 729 = x \Leftrightarrow 729 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Leftrightarrow 3^6 = 3^{-x} \Leftrightarrow x = -6$
   Luego: $\text{Log}_{\frac{1}{3}} 729 = -6$
3. Calcular el valor de "x" si cumple la igualdad:
   $$\text{Log}_{1/2} 1024 = 3 - x$$
   $$\Leftrightarrow 1024 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \Leftrightarrow 2^{10} = 2^{x-3} \Leftrightarrow 10 = x - 3$$
   $$\Rightarrow x = 13$$

III. IDENTIDAD FUNDAMENTAL DEL LOGARITMO

Si a > 0; $a \neq 1 \wedge b > 0$ se cumple:

$$a^{\text{Log}\, b}\ b$$

Ejemplos:

- $2^{\text{Log}_2 3} = 3$
- $(m-4)^{\log_{m-4} 10} = 10, \forall\ m > 4 \wedge m \neq 5$
- $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\log_{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} 2} = \frac{1}{2}$

IV. TEOREMAS SOBRE LOGARITMOS

Sea la base real a, tal que $a > 0 \wedge a \neq 1$

1. Sea A y B reales, tal que: AB > 0:
   $$\text{Log}_a AB = \text{Log}_a A + \text{Log}_a B$$
2. Sea A y B reales, tal que: $\frac{A}{B} > 0$
   $$\text{Log}_a\left(\frac{A}{B}\right) = \text{Log}_a A - \text{Log}_a A$$
3. Sea A real, tal que $n \in N \wedge A^n > 0$
   $$\text{Log}_a A^n = n\text{Log}_a A$$
4. Sea A real, tal que $n \in N$, n > 2. Si A > 0:
   $$\text{Log}_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\text{Log}_a A$$
5. Sea A real, tal que: A > 0, $m \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{R}$
   $$\text{Log}_{a^n} A^m = \frac{m}{n}\text{Log}_a A \ ;\ n \neq 0$$

Colorario

Si se eleva a un exponente "m" y se extrae raíz n-ésima a la base y número del logaritmo el valor de logaritmo no se altera.

$$\text{Log}_a A = \text{Log}_{a^n} A^n = \text{Log}_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{A} \ ;\ A > 0$$

6. Si: $A > 0 \wedge B > 0$
   $$\text{Log}_a A = \text{Log}_a B \Leftrightarrow A = B$$

7. Cambio de base:
Sea la base "c" donde $c > 0 \wedge c \neq 1$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demostración:

Por identidad: $c^{\log_c b} = b$ ..... (1)

Por identidad: $a^{\log_a b} = b$ ..... (2)

Además: $c^{\log_c a} = a$ ..... (3)

Reemplazando (3) en (2) se obtiene:

$$\left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = c^{\log_c b} \Leftrightarrow \log_c a \log_a b = \log_c b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \; ; \; \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

A. Propiedad

$$\log_b a = (\log_b a)^{-1} = \frac{1}{\log_a b}$$

B. Regla de la cadena

Si: $a > 0; a \neq 1; b > 0; b \neq 1; c > 0; c \neq 1 \wedge d > 0$ se cumple:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$$

C. Sistemas de logaritmos

Cada base de logaritmos determina un sistema de logaritmos, en consecuencia existen infinitos sistemas de logaritmos para una base positiva y diferentes de 1; los sistemas más importantes son:

1. Sistema decimal o de Briggs

Es aquel sistema de logaritmos en la cual la base es 10.

Notación: $\log_{10} N = \log N$

Se lee: Logaritmo de "N". En general:

$$\log N = \underbrace{\boxed{\text{Parte entera}}}_{\text{(característica)}} \; ; \; \underbrace{\boxed{\text{Parte decimal}}}_{\text{(mantisa)}}$$

Teorema

Sea todo $N > 1$ el número de cifras es igual a la característica más uno. Es decir:

$$\#\text{ de cifras } N = \text{característica} + 1$$

2. Sistema hiperbólico o Neperiano

Es aquel sistema cuya base es el número trascendental:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

$e = 2,7182....$

Notación: $\log_e N = \ln N$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si n es un número entero positivo y

$$y: 2^{\log_2 4} - 1 = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \ldots \log_2 2^n$$

halle el valor de $\log_{\frac{1}{n}} 4$

A) $-1/2$ B) 2
C) $-2/3$ D) -1
E) -2

UNMSM 2012 - II

Resolución:

$3 = \log_2 2.2^2.2^3 \ldots 2^n \rightarrow 2^{1+2+3+\ldots+n} = 8$

$\frac{n}{2}(n+1) = 3 \Rightarrow n = 2$

Luego: $\log_{1/n} 4 = \log_{1/2} 4 = -2$

Respuesta: −2

Problema 2

Si p, q, r $\in \mathbb{R}^+$ y

$$E = \frac{1}{\log_r(pq+1)} + \frac{1}{\log_q(prq+1)} + \frac{1}{\log_p(qr+1)} + 1$$

halle el valor de E.

A) 1 B) 1,5
C) 3/5 D) 2
E) 3

UNMSM 2012 - I

Resolución:

$E = \log_{pqr} r + \log_{pqr} q + \log_{pqr} p + 1$

$= \log_{pqr}(pqr) + 1 = 1 + 1 = 2$

Respuesta: 2

Problema 3

Halle el dominio de la función F definida por: $F(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2x-3}{x+5}\right)}$

A) $\mathbb{R} - \langle -5,8]$ B) $\mathbb{R} - \langle -5,8\rangle$
C) $\mathbb{R} - [-5,8]$ D) $\mathbb{R} - [-5,7\rangle$
E) $\mathbb{R} - [-5,8\rangle$

UNMSM 2009 - I

Resolución:

$\ln\left(\frac{2x-3}{x+5}\right) \geq 0 \rightarrow \ln\left(\frac{2x-3}{x+5}\right) \geq \ln 1$

$\frac{2x-3}{x+5} > 0 \wedge \frac{2x-3}{x+5} \geq 1$

$= \frac{2x-3}{x+5} \geq 1 \rightarrow \frac{x-8}{x+5} \geq 0$

$x \in \mathbb{R} - [-5,8\rangle$

Respuesta: $\mathbb{R} - [-5,8\rangle$